

Avaliação de Longevity Bonds via Transformada de Wang

Edgar Faustino Gomes da Silva

Dissertação apresentada como exigência parcial para a
obtenção do grau de Mestre em Estatística e Gestão de
Informação

NOVA Information Management School
Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação
Universidade Nova de Lisboa

Avaliação de Longevity Bonds via Transformada de Wang

por

Edgar Faustino Gomes da Silva

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau de Mestre em
Estatística e Gestão de Informação, Especialização em Análise e Gestão de Risco

Orientador: Professor. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo

Fevereiro de 2020

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Jorge Bravo, a disponibilidade total, o empenho e aconselhamento, em diferentes fases desta investigação, e, em especial, pelo seu sentido crítico e a sua máxima exigência.

Agradecimentos à minha família, por terem sido um apoio fundamental para alcançar os meus objetivos, pela compreensão e motivação ao longo da minha vida académica, em especial à minha mãe.

Por fim, agradeço aos meus amigos por terem estado sempre ao meu lado, ajudando-me a manter foco nos meus objetivos; não menos importante, o agradecimento especial aos meus colegas de trabalho, durante esta etapa exigente da minha vida.

RESUMO

O aumento drástico da esperança média de vida, a nível global, registado nas últimas décadas, em especial em Portugal, coloca enormes desafios à gestão do risco de longevidade por parte dos fundos de pensões e das seguradoras, sejam estatais ou privadas. Para ultrapassar esta problemática, têm sido desenvolvidos vários produtos de cobertura do risco de longevidade, assentes no mercado de capitais “derivados e bonds”, como alternativa ao mercado tradicional de resseguro, sendo que esta investigação focará a sua tenção no Pricing Longevity Bonds, através do modelo da transformada de Wang.

Os Longevity Bonds são um dos produtos de cobertura de risco pouco explorados no mercado de capitais de gestão de risco de longevidade, como alternativa ao mercado tradicional do resseguro. A realização desta investigação tem como objetivo, a estimação dos preços de dois tipos de obrigações, clássicas e diferidas, obrigações semelhantes às que foram utilizadas pelo EIB/ BNP em 2004, utilizando uma simulação empírica com os dados, disponibilizados por The Human Mortality Database, entre 1980 e 2015, através do método de Lee Carter Poisson para alcançar a dinâmica estocástica da taxa de mortalidade em Portugal nos próximos 50 anos.

Para a determinação do prémio de risco de longevidade, recorreu-se ao modelo; Wang transform, modelo que permitiu a realização de análises por género, diferentes idades, maturidade das obrigações e nível de risco da taxa de juros.

Os resultados obtidos nesta investigação, diferem em função do género, da idade e do nível de risco, e poderão ser encontrados com mais detalhes na quinta secção.

Assim sendo, esta investigação pretende contribuir para a resolução da problemática associada à estimação do preço da obrigação e, por outro lado, tornar mais perceptível este produto, tão pouco explorado no mercado de capitais, mostrando que deve ser considerado, por parte de companhias de seguros e fundos de pensões, na gestão do risco de longevidade, transferindo uma parte da sua carteira de risco para o mercado de capitais como alternativa ao mercado tradicional de resseguro.

PALAVRAS-CHAVE

Longevity Risk Management; Fundo de Pensões; Longevity Bonds; Lee-Carter; Wang Transform; Portugal; Obrigações; Pricing

Avaliação de Longevity Bonds via Transformada de Wang

Abstract

The drastic increase in recent decades of the average life expectancy globally, especially in Portugal, poses enormous challenges to the management of longevity risk by pension funds and insurance companies, whether state or private. To overcome this problem, various hedging products have been developed based on longevity in the capital market "derivatives and bonds" as an alternative to traditional reinsurance market, and this research will focus on Pricing Longevity Bonds through two models.

Longevity Bonds is one of the hedging products unexplored in the capital market in longevity risk management as an alternative to the traditional reinsurance market. This research aims to estimate the prices of two types of requirements, classic and deferred, similar to those used by the EIB/ BNP in 2004. Using an empirical simulation with the data, provided by The Human Mortality Database, between 1980 to 2015, by Lee Carter Poisson method, to achieve dynamic stochastic mortality rate in Portugal in the next 50 years.

In determining the award for longevity risk, model was used, Wang transform, model that allowed the carrying out of analysis by gender, age difference, and maturity of obligations and risk level of interest rates.

The achieved results of this research differ according to gender, age and level of risk, these can be found in further detail in Chapter 5.

Therefore, this research aims to contribute to the problem of resolution associated with the estimation of bond price and on the other hand become a more noticeable product that is so little explored in the capital market, demonstrating that it must be considered by insurance companies and pension funds in the management of longevity risk by transferring a portion of their risk portfolio to the capital market as an alternative to the traditional reinsurance market.

KEYWORDS

Longevity; Risk Management; Fundo de Pensões; Longevity Bonds; Lee-Carter; Wang Transform; Portugal; Obrigações; Pricing.

ÍNDICE DE CONTEÚDOS

1. Introdução.....	10
2. Revisão Da Literatura.....	15
3. Metodologia Da Investigação.....	20
3.1. Modelo De Lee-Carter	20
3.2. Tipos De Obrigações De Longevidade.....	23
3.2.1. Obrigações De Longevidade.....	23
3.2.2. Categorias De Longevity Bonds.....	23
3.2.3. Obrigações Clássicas De Longevidade	24
4. Pricing Bonds Risk Premium	25
4.1. Wang Transform.....	25
5. Resultados.....	26
5.1. Análise De Dados.....	26
5.2. Estimativa Dos Parâmetros Do Modelo Lee-Carter Poisson Pela Função Da Máxima Verosimilhança.....	27
5.3. Seleção Do Modelo Arrima.....	29
5.4. Estimativa Dos Parâmetros Do Modelo Arima.....	32
5.4.1. Análise Dos Resíduos	32
5.4.2. Projeção Da Tendência De Série Temporal	36
5.6. Tábua De Mortalidade.....	37
5.7. Pricing Da Obrigação De Longevidade.....	37
5.7.1. Cupões Da Obrigação De Longevidade	37
5.7.2. Estimação Do Preço De Uma Obrigação De Longevidade Clássica.....	39
5.7.3. Estimação Do Preço De Uma Obrigação De Longevidade Diferida.	39
5.8. Análise De Sensibilidade	40
6. Conclusão.....	41
7. Bibliografia.....	43
8. Anexos.....	47

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1- Taxa De Mortalidade Anual Logarítmica Para A População De Portugal No Período De 1980 A 2015 Dos 60 Aos 95 Anos.....	26
Figura 2 - Estimativa Dos Parâmetros α_x , β_x E k_t Através Do Modelo De Lee Carter-Poisson Para As Idades Compreendidas Entre 60 E 95 Anos (Homens A Vermelho, Mulheres A Verde E O Total A Azul)	28
Figura 3 - Série Δk_t E Respetivo Gráfico ACF E PACF Para Homens, Mulheres E Total Da População Na Primeira Diferença.....	30
Figura 4 - - Série Δk_t E Respetivo Gráfico ACF E PACF Para Homens	30
Figura 5 - Serie Δk_t E Respetivo Gráfico ACF E PACF Para Mulheres	31
Figura 6 -Serie Δk_t E Respetivo Gráfico ACF E PACF Para Total Da População.....	31
Figura 7 -ACF, P-Values E Estandarização De Resíduos, Homens.	34
Figura 8 - ACF, P-Values E Estandarização De Resíduos, Mulheres.....	34
Figura 9 - ACF, P-Values E Estandarização De Resíduos, Total Da População.	34
Figura 10 -Gráfico, Histograma, Lag Dos Resíduos Para Homens	35
Figura 11- Gráfico, Histograma, La E QQ-Plot Dos Resíduos Para Mulheres.....	35
Figura 12 - Gráfico, Histograma, Lag E QQ-Plot Dos Resíduos Para Total Da População.....	35
Figura 13 - Análise Diferida Da Variável k_t Nos Últimos 85 Anos.....	36
Figura 14 - Projeção Futura Para 50 Anos Da Variável k_t Por Um Passeio Aleatório Com Drift Com Um Intervalo De Confiança De 95% A 99%.	36
Figura 15 - Evolução De U_x , T Ajustadas Ao Modelo De Lee-Carter Poisson.....	37
Figura 16 - Evolução Dos Cupões Ao Longo Da Maturidade Da Obrigação De Longevidade Segundo Abordagem De Wang Transform.....	38

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Teste ADF para a série kt e para primeiras diferenças.....	29
Tabela 2 - Seleção da ordem do modelo ARIMA.....	31
Tabela 3 - Estimativa dos parâmetros do modelo ARIMA.....	32
Tabela 4 - Teste de independência dos resíduos de Box-Ljung para o melhor modelo ARIMA.	33
Tabela 5 - Teste de normalidade dos resíduos Shapiro-Wilk.....	33
Tabela 6 - Teste de variância e média dos resíduos	33
Tabela 7 - Preço de obrigação de longevidade clássica.....	39
Tabela 8 - Preço da obrigação de longevidade diferida por cinco anos.....	39
Tabela 9 - Preço de longevidade da obrigação em diferentes idades	40
Tabela 10 - Impacto da maturidade no preço da obrigação	40

ÍNDICE DE ACRÓNIMOS E ABRIVIATURAS

INE.....	Instituto Nacional De Estatística
EIB.....	Banco Europeu de Investimento
ASF.....	Autoridade de Seguros e Fundos de pensões
WTW.....	Willis Towers Watson

1. INTRODUÇÃO

Uma das principais conquistas da política social em Portugal, no último século, foi uma acelerada redução dos níveis de pobreza, a todos os níveis, em especial na velhice, resultado desse alcançado, em boa medida, com programas de assistência social, desenvolvidos pelos sucessivos governos, como programas não contributivos, direcionados principalmente para uma faixa etária mais idosa, que não cumpriam com as condições elegíveis, para receberem reformas, ou que se encontravam em condições vulneráveis.

Com o decorrer do tempo, este sistema tornou-se, assim, uma das principais rubricas de despesa nos orçamentos do Estado, existindo hoje uma noção clara de que o seu peso tenderá a aumentar no futuro, tendo em conta a inversão da pirâmide etária e a debilidade da economia portuguesa, o que poderá colocar em causa a sustentabilidade das finanças públicas e a gestão dos sistemas de fundos de pensões privados e das seguradoras, uma vez que estão expostos ao risco de longevidade. Por outro lado, também colocará em causa o sistema de pensões público, financiado em repartição e fortemente dependente em cada momento de uma adequada relação entre o número de contribuintes e o número de prestações sociais pagas (Bravo, 2019, 2020).

O longevity bond poderá responder à problemática do risco de longevidade da população portuguesa através da transferência do risco dos fundos de pensões privados para o mercado de capitais, aumentando desta forma o leque de activos a incluir em carteiras diversificadas e as possibilidades de gestão do risco. No caso dos sistemas de pensões públicos, a emissão de longevity bond pelo estado português não constitui uma solução de redução do risco de longevidade na medida em que iria aumentar ainda mais a já significativa exposição ao risco, tendo em conta o número de segurados.

Relativamente aos fundos de pensões públicos (tipicamente enquadrados em sistemas mais vastos de protecção social), tiveram origem no período entre as duas grandes guerras, quando foi estabelecido um sistema de previdência social, um sistema bastante frágil e limitado, tanto a nível da aplicação pessoal (ramos de atividade e profissões), como no campo da aplicação material (eventuais coberturas). Na década de 1970, após o 25 de Abril de 1974, houve profundas mudanças, alargando-se o conceito de direito universal de protecção social, tal como ficara previsto na Constituição da República Portuguesa de 1976. Exemplo dessas mudanças, foi a implementação de medidas como a pensão social, que beneficia todas as pessoas com idade superior a 65 anos que não exercem uma atividade remunerada. Com a entrada de Portugal na União Europeia, em 1986, houve um crescente número de trabalhadores que passaram a financiar a Segurança Social, através das suas contribuições e quotizações, o que aumentou a sua liquidez, permitindo assim auxiliar uma grande parte da população que ainda dependia desses fundos (Bravo & Herce, 2015, 2020).

Nesta fase, a longevidade não era assinalada como um problema a ter em conta, pois a estrutura etária da população portuguesa em 1970, assemelhava-se a uma pirâmide, com uma população grande e jovem na base e um pequeno número de idosos no topo. Contudo, em 2009, já se notavam algumas alterações, que indiciavam problemas relacionados com a longevidade e fecundidade. As projeções demográficas mais recentes apontam para que, tanto a população em geral, como a população em idade ativa, caíram em Portugal e na Europa no século XXI (Bravo, 2015a, b).

A longevidade tenderá a aumentar exponencialmente, em países como Portugal, com baixos níveis de fecundidade e, atualmente, com saldos migratórios negativos, a estrutura etária populacional começará a assemelhar-se a uma pirâmide invertida, pela primeira vez na

História da humanidade, as gerações mais jovens a serem em menor número do que as gerações precedentes.

As migrações constituem um ativo fundamental para o desenvolvimento dos países, quer ao nível do seu potencial contributo demográfico, quer ao nível da renovação da população, bem como da força de trabalho e desenvolvimento do país e da economia.

Neste sentido, o impacto da imigração no plano demográfico em Portugal tem revelado contribuições importantes, não só ao nível do seu peso no crescimento populacional, mas também por vias do reforço nas idades mais jovens, com destaque para o nível das fecundas, o que se traduz num maior índice sintético de fecundidade que, mesmo assim, tem sido insuficiente para responder ao problema.

O aumento da despesa com as pensões pagas cresceu significativamente nos últimos anos, quer por parte das instituições privadas como do Estado, facto ligado à longevidade das pessoas e, por outro lado, à diminuição das receitas das contribuições da população ativa e à deterioração do saldo financeiro. O conceito de longevidade surgiu associado ao aumento da esperança média de vida, ou seja, ao facto de a população viver mais anos do que é expectável, colocando essa problemática grandes desafios às instituições que oferecem produtos renda vitalício, que não conseguem determinar o prémio de risco com precisão.

Esta situação, deve-se principalmente à situação estrutural de debilidade da economia portuguesa, que tem um impacto direto nas contribuições recebidas pelo fundo de pensões, que registou, em 2012, o pior resultado global dos últimos anos, com um aumento das despesas de 2,9%, superior às receitas efetivas de 2,7%, o que gerou uma diminuição do saldo orçamental em 419 milhões de euros.

A esperança média de vida tem crescido constantemente, ao longo das últimas décadas, em Portugal, estimando-se, segundo os dados publicados pelo Instituto Nacional de Estatística para 2018, que a esperança média de vida seja de 80,8 anos para o total da população, de 77,78 anos para os homens e de 83,42 anos para as mulheres. Esta evolução positiva, deve-se principalmente à melhoria dos padrões de vida e ao avanço da medicina, sendo um dos principais motivos desse aumento da longevidade, a redução da taxa de mortalidade entre a população mais idosa. A evolução da esperança de vida não tem sido, contudo, homogénea entre grupos socioeconómicos, observando-se diferenças substanciais entre a longevidade dos grupos mais desfavorecidos e a de grupos com níveis de rendimento, riqueza e educação mais elevados (Ayuso, Bravo & Holzmann, 2017a, b, 2019; Bravo et al., 2020)

Por outro lado, a taxa de crescimento económico e a taxa de emprego entre os jovens roda os valores mais baixos das últimas décadas, o que representa um grande desafio para a programação do plano de reforma, uma vez que existem menos pessoas a contribuir para o número de idosos que existem, ou seja, não existe uma relação de proporcionalidade, o que coloca em causa as futuras pensões e a forma como as seguradoras e os fundos de pensões determinam o prémio de risco.

A grande questão que se coloca é de saber se as seguradoras e os fundos de pensões estarão preparados para lidar com esta problemática da longevidade na forma como determinam o prémio de risco. Tendo em conta a longevidade, deverá haver uma partilha de risco, de acordo com o modelo tradicional de resseguro ou uma transferência do risco para o mercado de capitais?

O crescimento da longevidade, registado em Portugal na última década, coloca um grande desafio à gestão dos fundos de pensões e das seguradoras. Segundo os dados apresentados

pelo INE, aponta-se claramente para dois fatores: “subida contínua da esperança média de vida e descida da taxa de natalidade, o que desequilibra o rácio de dependência entre jovens e idosos, colocando em causa as finanças das seguradoras e dos fundos de pensões”.

Tal como foi referenciado no ponto anterior, a problemática da longevidade é algo que tem crescido nos últimos anos, sendo a evolução da longevidade humana em Portugal nas últimas décadas marcada por um aumento significativo da esperança média de vida em todas as idades, resultante da baixa taxa de mortalidade, acompanhada por uma baixa taxa de fecundidade. Estes ganhos, registados na longevidade humana, constituem, naturalmente, uma alteração positiva para os indivíduos, que sendo positiva, coloca, por outro lado, novos desafios, em múltiplas áreas de intervenção, quer na esfera estatal como privada (Bravo, 2007, 2016, 2019, 2020).

O risco da longevidade surge, assim, associado à probabilidade de a população viver cada vez mais anos, muito para além da idade da reforma, começando-se a equacionar o conceito de risco de longevidade, representando assim a incerteza resultante de mudanças inesperadas na mortalidade em Portugal.

Os conceitos "risco de longevidade" e "risco de mortalidade" são muitas vezes utilizados de forma confusa, embora representem, na prática, duas faces da mesma moeda. Com efeito, enquanto a expressão risco de longevidade indica coletivamente o risco de desvios sistemáticos da mortalidade, face aos valores esperados (projetados), em particular, que um indivíduo ou uma população sobrevivam sistematicamente para além do esperado, o termo risco de mortalidade é usado, regra geral, para descrever o risco de que uma população viva, em termos agregados, menos do que o esperado, (Bravo, 2007; Bravo, Real & Silva, 2006. 2009)

O risco de longevidade é tradicionalmente encarado como um risco sistemático, não diversificável. No entanto, nos últimos anos, com a relevância do tema e com um aumento contínuo da longevidade, começou a desenvolver-se o chamado “Life Market”, mercado assente, principalmente, na transação de instrumentos financeiros indexados à longevidade, com o objetivo de alcançar uma cobertura de risco mais eficaz, que possa minimizar o impacto no passivo e nas obrigações das entidades afetadas a este problema. Denota-se que o número de produtos ligados ao risco da longevidade, tem aumentado drasticamente no mercado de capitais. Produtos como os swaps de longevidade (longevity swaps), as obrigações de longevidade (longevity bonds) e as obrigações de mortalidade (mortality bonds), as obrigações indexadas a mortalidade (mortality-linked-securities), os contratos forward (q-forwards e s-forwards), os contratos de futuros em que o subjacente é a longevidade e ainda as opções de longevidade (longevity options).

Recentemente, foi debatida a implementação de um novo instrumento, longevity caplets e longevity floolets. Comparativamente ao que já acontece no mercado de opções com taxas de juro, esses produtos assentam na construção de longevity caps e longevity floors, instrumentos construídos em combinação com os anteriores, neste caso, com diferentes datas de exercícios. Equacionou-se recentemente a introdução de mortality swaptions, contratos estabelecidos entre duas partes, instrumentos complexos e sofisticados, tendo subjacentes um swap de mortalidade de um tipo com prazo específico. Podendo possuir várias características, “Americano, Europeu ou Bermuda”, oferece assim ao seu titular o direito a entrar no swap em qualquer um dos dois lados (Alho, Bravo & Palmer, 2013; Bravo & Freitas, 2018; Blake et al., 2006; Bravo & Nunes, 2019; Bravo, 2019).

Uma contribuição fundamental para o desenvolvimento deste mercado, foi a emissão do título Kortis, pela Swiss Re, em 2010. Diferente das obrigações anteriores de mortalidade e

sobrevivência., este título Kortis está ligado ao desvio das taxas de melhoria da mortalidade entre dois países e não, diretamente, às taxas de mortalidade ou para a sobrevivência numa coorte. Como tal, foi colocado como o primeiro "título de tendência à longevidade". O título pode ser visto como uma forma diferente e nova de transferência de risco e de reduções mais rápidas do que o esperado das taxas de mortalidade.

Em 2004 o Banco Europeu de Investimento (EIB), em conjunto com a PartnerRE e o BNP Paribas, propôs-se emitir obrigações indexadas à longevidade, numa estrutura com maturidade de 25 anos e um valor nominal de 540 milhões de dólares. Serão explicados com mais detalhes na secção que se segue.

A grande problemática, assente no mercado mundial de longevidade, prende-se com a dificuldade em determinar o preço destes instrumentos. Atualmente, este mercado é ainda considerado incompleto, ou seja, não existem grandes emissores desses instrumentos, o que dificulta ainda mais acautelar o risco de longevidade e o seu preço.

Por outro lado, as instituições enfrentam dificuldades em responder à exigência de capital e à redução do nível de risco, impostas pela entidade reguladora dos fundos de pensões e das seguradoras em Portugal (ASF), face ao regime de Solvência II, em que o risco de longevidade passa a ser reconhecido de uma forma mais rigorosa nos balanços dessas instituições, aumentando a exigência de solicitação de capitais. Surge, assim, a necessidade de criar novas formas de transferência deste risco, que não passem pelo resseguro, uma vez que a capacidade de resseguro é limitada e o risco é não diversificável.

Embora existam outros instrumentos de gestão de longevidade, como os longevity linked securities ou os mortality bonds, esta investigação irá incidir sobre o capital market longevity bonds. A modelação da mortalidade é feita com base na metodologia proposta originalmente por Lee e Carter (1992). Para a estimação do prémio de risco, será utilizado o método: a transformada de Wang (Wang Transform).

A problemática em torno da longevidade humana pode decompor-se em diferentes níveis de risco: flutuações aleatórias, registadas nas taxas de mortalidade (risco de volatilidade), desvios sistemáticos (Trend Risk), mortalidade catastrófica (Jump Risk) e risco de base (Basis Risk). Algumas das problemáticas identificadas da incerteza, poderão ser eliminadas por via do aumento da dimensão das carteiras (homogéneas), apelando à lei dos grandes números (Pooling Risk), mas no caso do risco de longevidade, a sua natureza sistemática não permite que possa ser eliminado por uma simples diversificação da carteira. Pelo contrário, o seu impacto financeiro cresce à medida que a dimensão da carteira aumenta, uma vez que os desvios afetam todas as pessoas seguras, da mesma forma e no mesmo sentido (Bravo, 2007).

Do conjunto de instrumentos, acima referido, aqueles que se destacam, devido à sua importância, são as obrigações de longevidade, primeiro instrumento a ser emitido no mercado de capitais, em que o pagamento do cupão dependia da proporção da população sobrevivente de determinada idade, tendo sido projetadas para fazer a cobertura dos pagamentos de anuidades de companhias de seguros e fundos de pensões, tal como é referido por Bravo (2007). Embora tendo sido o primeiro instrumento emitido no mercado de capitais, as obrigações de longevidade ainda continuam a ser um instrumento demasiadamente complexo, o que o torna pouco atraente no mercado, pela sua complexidade e pela forma como é obtido o preço das obrigações e a sua maturidade, o que retira alguma confiança a quem compra, por não ter garantias de receber os cash-flows até a maturidade. Embora existam alguns inconvenientes, as obrigações de longevidade apresentam um grau de potencialidade elevado, que é justificado pela sua capacidade de

transferir parte do risco de longevidade inerente a todo o sistema de pensões e pela sua exploração ser uma mais-valia para a economia.

Mesmo sendo complexas, quando comparadas com outros derivados, como, por exemplo, os longevity swaps, as mortality-linked-securities ou as longevity options, poderá afirmar-se que têm, ainda assim, uma estrutura menos complexa e os investidores estão mais familiarizados com o seu conceito.

Perante esta problemática, esta investigação focará a sua atenção sobre a análise das obrigações de longevidade propostas como uma forma de cobertura do risco de longevidade, nomeadamente, na estimação do seu preço, através da Transformada de Wang.

A estrutura desta investigação é constituída por cinco secções. Na primeira secção é feita uma contextualização da problemática e da demografia portuguesa, na segunda secção, a revisão das pesquisas já realizadas em torno destes instrumentos financeiros ligados à longevidade. Na terceira secção, é descrita a metodologia da investigação e o modelo Lee-Carter Poisson, utilizado posteriormente para projetar a probabilidade de morte em Portugal. Na quarta secção, são descritos o método de pricing utilizado, “Wang transform”, na estimação do prémio de risco. Por fim, na quinta secção, é feita a simulação e análise de sensibilidade dos preços das duas obrigações, clássica e diferida, bem como da maturidade, para os dados da população portuguesa.

2. REVISÃO DA LITERATURA

O ponto de partida geral desta revisão da literatura é baseado nas investigações de Lee e Carter (1992), que desenvolveram um modelo estatístico (estocástico) para descrever a mortalidade com recurso a vectores de parâmetros ligados à idade e ao tempo cronológico e para realizar projecções através de métodos de previsão de séries temporais. Este método foi aplicado originalmente na previsão das taxas de mortalidade nos Estados Unidos da América. Outro método estocástico clássico, em tempo discreto, de modelização de mortalidade é o modelo de Cairns, Blake & Dowd (2006), que depende das trajetórias de dois fatores estocásticos.

A razão pela qual estes instrumentos ligados a longevidade desperta tanta atenção, é porque as seguradoras e os fundos de pensões estão expostos diariamente ao risco de longevidade e são confrontados com problemas como lidar com isso. As pessoas pagam os prémios de seguro e contribuições durante a sua vida activa e esperam o recebimento dos benefícios após a sua reforma. Os fundos de pensões têm a responsabilidade de garantir os pagamentos aos seus contribuintes, mas com o aumento da esperança média de vida, os fundos de pensões e as seguradoras começam a demonstrar algumas dificuldades na forma como fazem a gestão deste risco. São, assim, precisos melhores instrumentos de cobertura de risco de longevidade, passando pelo desenvolvimento de novos produtos, resseguros, emissão de obrigações, entre outras soluções.

Ao longo do século XXI, tem-se assistido a um aumento da longevidade, sem precedentes, na esperança média de vida em todas as faixas etárias, principalmente nas idades mais avançadas, em especial nas sociedades mais desenvolvidas. Essa evolução deve-se principalmente ao avanço da medicina, às melhorias das condições de vida, à ausência de conflitos militares ocidentais e, por fim, à inexistência de grandes epidemias (Denuit, Devolder & Goderniaux, 2007; Jevtić, Hankuk & Pirvu, 2017).

O risco de longevidade está a atrair cada vez mais a atenção das companhias de seguros e dos fundos de pensões, uma vez que, este risco tem aumentado em muitos países. No entanto, não existe ainda um mercado líquido para a cobertura do risco de longevidade (Sherris & Wills, 2007).

Em 2011, discutiu-se uma nova abordagem da cobertura, baseada na análise do risco de base. Uma boa cobertura poderia ser qualificada como risco de base pequeno. Através deste estudo de caso, descobriu-se que o risco de longevidade poderia ser substancialmente coberto com um hedging de índice, como uma boa alternativa às coberturas de longevidade personalizadas. (Coughlan, 2011)

As entidades expostas ao risco de longevidade têm vários instrumentos ao seu dispor para mitigarem o risco de longevidade, as quais passam por redesenhar as características dos produtos tradicionais. A título de exemplo, podem referir-se as survivor credits, anuidades que pagam um bónus aos beneficiários, em função das taxas de mortalidade observadas na população abrangida. Uma outra solução, passa por adotar uma estratégia de pricing diferenciada entre os indivíduos, de acordo com os seus fatores específicos de risco, como, por exemplo, o estado da saúde, o estilo de vida, os rendimentos, entre outros, tal como é sugerido em (Carlos, 2011; Blake et al., 2013).

O cálculo das rendas vitalícias surge como uma alternativa fiável para os contribuintes assegurarem um complemento de rendimento à sua reforma, mas com o aumento exponencial da procura, as seguradoras e os fundos de pensões que vendem estes produtos de renda vitalício, ficam cada vez mais expostos à concentração de risco, uma vez que os

contribuintes transferem o risco para as entidades “seguradoras e os fundos de pensões”, gerando assim a necessidades de essas entidades efetuarem uma gestão eficiente e eficaz do risco, sem a necessidade de assegurarem níveis elevados de capitais, nem uma cobertura de prémios altos pela oferta dos seus produtos (Blake, 2010; Ngai & Sherris, 2011).

O resseguro é um modelo de gestão de risco válido, embora não conduza a uma redução do risco global, mas sim a uma alteração da entidade que o suporta. Para além disso, o sector não é suficientemente profundo na análise e observação da vasta quantidade de risco de longevidade a que as companhias de seguros e os fundos de pensões estão expostos, sem contar ainda com os custos elevados associados a estes tipos de contratos, embora seja um modelo útil na gestão de risco, respondendo a necessidades específicas das seguradoras e dos fundos de pensões, com o aumento da esperança média de vida, terão de se considerar outras opções (Cox, 2013).

Tendo em conta a dimensão do mercado de capitais e a correlação entre risco financeiro e demográfico, a gestão do risco através dos mercados de capitais é indiscutivelmente das melhores soluções para reduzir a exposição ao risco por parte dos fundos de pensões e as seguradoras, nomeadamente, através da emissão de obrigações de longevidade, no chamado life market. Estes instrumentos são contratos financeiros com retornos que dependem da evolução futura das taxas de mortalidade observadas num determinado período. Embora este mercado ainda esteja pouco desenvolvido, já ocorreram algumas transações destes derivados que são considerados a opção com mais potencial para a cobertura do risco de longevidade (Cox et al., 2013; Levantesi & Menzietti, 2017).

Este instrumento foi concebido para proteger o seu detentor (investidor) contra quaisquer melhorias não antecipadas na mortalidade até à maturidade da obrigação. Neste sentido, o payoff do investidor das obrigações de longevidade aumenta (diminui) quando a sobrevivência aumenta (diminui) (Blake & Burrows, 2001), com o nome de survivor bonds, obrigações em que o pagamento do cupão depende da proporção da população sobrevivente numa determinada idade (MacMinn & Brockett, 2017).

A primeira tentativa de emissão de um título de dívida indexado a um indicador de mortalidade/ longevidade ocorreu em dezembro de 2003, pelo Swiss Re, que colocou uma obrigação com cash flows indexados à evolução de um índice de mortalidade, com quatro anos de maturidade, valor facial de 400 milhões de USD e cupões variáveis indexados à LIBOR, com um spread de 135 basis points. A principal característica ou facto deste produto, é que o reembolso dependia diretamente do valor observado para um índice de mortalidade, projetado com base na média ponderada das taxas de mortalidade em cinco países (EUA, Reino Unido, França, Itália e Suíça), contemplando ambos os sexos e um intervalo de idade. Os principais investidores foram as instituições de fundos de pensões, uma vez que estes produtos tinham uma elevada taxa de retorno e, por outro lado, tinham o facto de ser um produto a curto prazo, o que motivou a ida aos mercados por parte dos fundos de pensões para adquirirem estes produtos, que seriam uma boa solução para a cobertura do risco, uma vez que, em caso de catástrofe com mortalidade, seriam reduzidas as principais obrigações e os payout dos pensionistas que também seriam afetados pela ocorrência. O produto teve tanto sucesso que originou a emissão de mais obrigações nos mercados, uma vez que, na primeira emissão, a procura superou a oferta, o que mostra o seu sucesso. Entretanto, na segunda emissão, o produto deixou de ser tão atrativo, uma vez que os termos foram menos favoráveis aos investidores, por exemplo, através dos veículos SPV Vita II – Swiss Re 2005 (\$362 milhões), Vita III– Swiss Re 2007 (\$705 milhões), Vita IV – Swiss Re 2009/10 (\$175 milhões) e OSIRIS-AXA 2006 (\$442 milhões) (Blake, 2013).

A segunda tentativa de emissão de obrigações indexadas à mortalidade, ocorreu em 2004, proposta pelo Banco Europeu de Investimentos (EIB), o PartnerRE e o BNP Paribas. O produto foi estruturado com uma maturidade a longo prazo (25 anos) e com um valor nominal de \$540 milhões.

O cash flow foi indexado à taxa de sobrevivência, em vez de à taxa de mortalidade, tal como acontecera na primeira emissão. A emissão não teve sucesso devido a um conjunto de factores que vão desde o cálculo de prémio de risco de longevidade, que colocou dúvidas nos investidores, uma vez que não havia certezas sobre a sua adequação, o facto dos investidores terem que despendir um elevado valor inicial, em comparação com a cobertura do risco, por exemplo, via longevity swaps e, por fim, o próprio conceito de “longevity bond” não era familiar à maioria dos participantes no mercado. A maior falha deveu-se, contudo, ao facto de a obrigação ter sido pouco clara na projecção das taxas de mortalidade e do índice de sobrevivência (Blake, Cairns & Dowd, 2006; Blake, 2013).

Porém, a emissão das obrigações de longevidade levanta uma série de problemas, particularmente no que toca ao desequilíbrio entre a procura e a oferta, sendo a oferta muito superior à procura. As empresas que fazem pagamentos que dependem do tempo de vida dos indivíduos, são as entidades com especial interesse na compra de obrigações de longevidade, nomeadamente, os fundos de pensões e as empresas de seguros (Blake, Boardman & Cairns, 2010).

Embora seja um produto que poderá responder a um dos grandes problemas de fundo de pensões e segurados, ainda levanta algumas dúvidas, principalmente na projecção das taxas de mortalidade e de sobrevivência, o que acaba por influenciar a procura e a oferta.

O risco de crédito é uma das preocupações que se levanta na emissão deste derivado, tendo em conta que cada produto envolve um número de diferentes contrapartes e uma maturidade com um período longo, como é o caso da maturidade da segunda emissão (25 anos). Para que possa haver atratividade neste instrumento, os investidores terão de ter a confiança de que os cash flows serão pagos (Blake, Cairns & Dowd, 2006).

Outros problemas colocadas em relação às emissões destes derivados, prendem-se com a forma como é feito o pricing das obrigações, devido à utilização do modelo estocástico da mortalidade na estimativa do prémio “justo” a atribuir ao risco de longevidade e, ainda, à escolha do índice de sobrevivência, pois existe uma grande preocupação em reduzir o risco de base entre a população de referência para a construção do índice e a mortalidade efetivamente experimentada nos membros que adquirem os produtos (Carlos, 2011).

Atualmente, existem vários tipos de obrigações de longevidade que dependem do tipo de obrigação, do índice de sobrevivência escolhido, da função de pagamento, da maturidade, dos riscos de crédito envolvidos, da posição que está a ser coberta e do tipo de instituição e de portfolio. Embora possam variar nestas dimensões, são agrupadas em duas grandes categorias, “principal-at-risk” e “coupon-based” longevity bonds. Neste caso, existe a possibilidade de o investidor perder, total ou parcialmente, o principal, se o evento de mortalidade ocorrer e, no segundo, as obrigações encontram-se indexadas à mortalidade (Blake, 2006).

Cupão zero é uma das obrigações de longevidade mais apelativa para os investidores “Fundos de Pensões e Seguradoras” por ser mais simples a nível de compreensão e, por outro lado, por apresentar geralmente maturidades mais curtas, características associadas a apenas um único pagamento, em proporção com a atual taxa de sobrevivência na maturidade, ou seja, os cupões acabam por não estarem tão expostos à absorção das taxas

registadas antes da maturidade, permitindo desta forma ao detentor construir uma carteira com várias maturidades. Esta obrigação de longevidade acaba por diferir da obrigação de longevidade tradicional (survivor bond), uma obrigação perpétua que efetua os pagamentos em função do índice de sobrevivência registado, desta forma os cupões incertos, devido à evolução da mortalidade, e os pagamentos ocorrem enquanto estiver vivo o último elemento da população de referência. Existe uma outra obrigação que funciona de modo inverso, com taxas variáveis, em que os cupões variam inversamente aos registos das taxas de juro. (Blake, Cairns & Dowd, 2006; Carlos, 2011).

Uma das outras alternativas são os longevity swaps, que consistem num acordo para trocar um ou mais cash-flows no futuro, baseando-se no resultado de um determinado índice de sobrevivência, numa determinada idade (x) e no período (y). Grande parte destes derivados financeiros são transacionados no mercado OTC (over-the-counter), em que uma das pernas (legs) está indexada à publicação dos resultados de determinada projeção de longevidade e outra, varia de acordo com a realização de um determinado índice, sendo os swaps mais comuns os s-forwards (swaps com apenas um pagamento) e as vanilla longevity swaps, ocorrendo os pagamentos em vários momentos, ao longo da maturidade. Estes derivados são atrativos, uma vez que apresentam baixos custos de transação, facilidade de cancelamento, não necessitando de um mercado líquido, dependendo apenas da existência de vantagens comparativas para ambas as partes ou perspetivas distintas quanto ao desenvolvimento da mortalidade no futuro, sendo bastante flexíveis, uma vez que podem ser ajustadas, consoante as necessidades das partes. Por outro lado, acarretam um nível de risco de crédito (default) considerável. (Blake, 2006; Bravo & Nunes, 2019).

Segundo a Willis Towers Watson (WTW), corretora e consultora de seguros ou resseguros, prevê-se que a longevidade das swap ultrapasse £25 mil milhões, no Reino Unido, o que seria mais do que o dobro da atividade do mercado em 2019. "Olhando para o futuro, em 2020, a WTW diz esperar que sejam feitos mais acordos, com um menor foco em acordos muito grandes. A empresa diz que "um novo regime regulatório, mudanças na mortalidade e mudanças no esquema e na procura das seguradoras irão definir outro ano de enfraquecimento para as coberturas de longevidade e as anuidades em massa".

Os q-forward (S-forward) são instrumentos simples do mercado de capitais para a transferência de risco de longevidade e de mortalidade, tendo payoffs indexados a um índice de mortalidade (longevidade). Este instrumento consiste num acordo entre duas partes, que trocam, na data de maturidade, um montante proporcional à taxa de mortalidade registada numa determinada população numa data futura pelo montante proporcional à taxa de mortalidade fixa mutuamente acordada no início. Os q-forward funcionam como um swap de cupão zero que troca a taxa de mortalidade fixa pela mortalidade flutuante de uma população específica, na data de maturidade. Sendo um instrumento simples, um dos grandes problemas associados a estes derivados é o facto de apresentarem uma insuficiência de compradores para os contratos, uma vez que são usados principalmente para fazerem a cobertura do risco de longevidade e do risco de mortalidade, que é particularmente aplicada a diferentes idades, o que cria uma assimetria com as necessidades dos potenciais compradores e, por sua vez, afeta o preço de mercado (Coughlan, 2007; Boyer & Stentoft, 2013; Barrieu & Veraart, 2014).

Recentemente, foi discutida a criação de longevity caplets e de longevity floolets, semelhantemente ao que acontece no mercado de opções com taxas de juro. Podemos imaginar a formação de longevity caps e longevity floors, instrumentos que são constituídos, respetivamente, por combinações dos anteriores e com diferentes datas de exercícios. Por outro lado, também têm vindo a ser analisados os mortality swaptions, contratos mais sofisticados, em que o instrumento subjacente seria um swap de mortalidade, com um tipo e prazo específicos. Poderá ser americano, europeu ou bermuda,

oferecendo ao seu titular o direito de entrar no swap em qualquer um dos dois lados (Blake, 2006; Alho, Bravo & Palmer, 2013; Bravo & Freitas, 2018; Bravo, 2019).

Aplicou-se recentemente na literatura uma nova metodologia, propondo-se o modelo de mortalidade markovian regime-switching, de modo a determinar o preço dos produtos indexados à mortalidade, que incorporam, não só as variações causadas por fatores exógenos, bem com as mudanças estruturais das condições económicas e ambientais, num modelo de mortalidade estocástico dinâmico (Dong, Yuen & Wu, 2018).

Atualmente, existem quatro abordagens mais populares de pricing do risco de longevidade, são elas: Wang Transform, risk neutral approach, e sharpe ratio approach (Bravo & Freitas, 2018).

A wang transform e a sharpe ratio são consideradas abordagens de distorção, ou seja, ajustam a distribuição do índice de sobrevivência, para criarem valores esperados ajustados ao risco de longevidade que podem ser descontados à taxa de juro sem risco (Dong, Yuen & Wu, 2014).

A Wang Transform usa uma transformação que depende apenas de uma variável, intitulada preço de mercado do risco de longevidade, para ajustar as probabilidades de morte pelo risco de longevidade. (Denuit, Devolder & Goderniaux, 2007)

A abordagem risk neutral é um modelo baseado numa teoria económica, na qual se estabelece que mesmo num mercado incompleto, se o mercado como um todo excluir a arbitragem, existirá pelo menos uma medida de probabilidade risk-neutral Q que pode ser usada para calcular os preços justos (Blake et al., 2006).

O Heath-Jarrow-Morton é um modelo em que a dinâmica da estrutura em torno da mortalidade e a dinâmica da estrutura em torno das taxas de juros são independentes. Esta abordagem foi várias vezes utilizada na literatura, como é o exemplo do trabalho desenvolvido por Barbarin (2007) que tentou acoplar o modelo de HJM a um modelo de previsão de mortalidade mais realista, onde é estudada a influência da mortalidade atual (real) na mortalidade futura, sendo que, nos trabalhos anteriores, havia a assunção da independência entre estas duas grandezas, existindo também uma revisão mais formal da definição de preço de uma obrigação de longevidade.

3. METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Esta investigação procura implementar uma abordagem sistemática e integrada sobre a forma como é feita a gestão do risco de longevidade em diferentes contextos, seja ela estática ou dinâmica, estocástica ou determinística, por parte dos fundos de pensões e das seguradoras em Portugal.

O foco principal desta investigação está na estimação do preço de uma obrigação de longevidade, através dos dados da mortalidade em Portugal, disponibilizados por The Human Mortality Database. Neste sentido, será utilizada a metodologia de Lee-Carter Poisson, que projetará a mortalidade da população portuguesa e, posteriormente, incluirá o risco de longevidade nas projeções de morte determinadas.

Os métodos utilizados nesta investigação, deverão contribuir para um melhor conhecimento da gestão de risco de longevidade e, da natureza da exposição ao risco a que o fundo de pensões e seguradoras estão sujeitos, servindo como ferramenta de avaliação e estruturação da estratégia de cobertura do risco de longevidade.

O objetivo principal será mostrar que através dos métodos determinísticos e estocásticos, apostando em longevity bonds, ou seja, obrigações de longevidade, se poderá fazer face às exposições de risco evidenciadas nas últimas décadas por parte de fundos de pensões e seguradoras em Portugal.

Nos últimos anos, foram desenvolvidas várias investigações baseadas na exposição do risco de longevidade a que as seguradoras e os fundos de pensões estão sujeitas, no sentido de se procurarem soluções para a cobertura do risco nos mercados de capitais, com a introdução de derivados financeiros longevity swaps, longevity floors, longevity caps e deferred longevity bonds., utilizando várias formas de pricing, wang transform, método risk neutral e sharpe ratio, tal como foi referenciado na segunda secção.

Contudo, tendo em conta as dificuldades de estimação dos preços destes produtos de longevidade, têm vindo a ser implementadas novas abordagens que conduzam à elaboração da tábua de mortalidade que melhor traduza a realidade. Neste caso, recorrer-se-á a uma abordagem de mortalidade estocástica numérica.

Os modelos mais utilizados são o Lee Carter e o de Cairns-Blake-Dowd, sendo aplicado nesta investigação o modelo Lee Carter, o que se deveu ao facto de ser um modelo simples, de fácil compreensão e tão preciso quanto os outros modelos.

Por outro lado, será aplicado o modelo de pricing: Wang Transform, a utilização deste método deveu-se ao facto de serem um método demasiado testado ao longo do século XXI, o que demonstra a sua fiabilidade e por outro lado, por ser um método que contempla o risco de longevidade.

3.1. Modelo de Lee-Carter

Historicamente, as projeções produzidas pelos institutos de estatística, assentam em modelos determinísticos e estocásticos que utilizam diferentes cenários para o futuro para descrever a incerteza. Estas projeções assentam na aceitação de um conjunto de hipóteses estabelecidas sobre a evolução da mortalidade ou sobrevivência em diferentes cenários. Estas projeções dependem muito da verificação, ou não, das hipóteses previamente definidas e se podem ou não descrever a realidade (Carrilho, 2005).

Este modelo é um método estatístico utilizado na previsão da mortalidade e da esperança de vida, resultando da combinação de uma componente demográfica específica para cada idade com um indicador de tendência temporal comum, baseado nos dados históricos da mortalidade registada, para projetar a mortalidade futura. Este modelo consiste numa matriz de taxas de mortalidade, resultante de duas combinações específicas por idade, ordenadas uniformemente pelo tempo, geralmente com idades em colunas e anos em linhas. Tornou-se num dos modelos principais e mais populares de previsão da mortalidade, desenvolvido com o propósito específico de prever a mortalidade nos Estados Unidos de América.

Nesta investigação, adotarei uma perspetiva mais alargada, considerando que a intensidade da mortalidade poderá ser modelada através de processos estocásticos, permitindo captar, de forma mais realista, duas características importantes da sobrevivência: a dependência temporal e a incerteza sobre a trajetória futura.

Lee e Carter (1992) desenvolvem um novo método de extrapolação das tendências e perfis etários da mortalidade no longo prazo, assente na combinação de um modelo demográfico para a mortalidade com métodos normalmente aplicados às séries temporais. O método, conhecido na literatura actuarial e demográfica por método Lee-Carter (LC), foi aplicado originalmente à população dos EUA e converteu-se, desde então, no método de referência usado por organismos oficiais e investigadores de todo o mundo na elaboração de projecções de mortalidade para a população (Deaton & Paxson, 2004; Bravo, 2007).

O método assenta na decomposição da mortalidade $m(x, t)$ em duas parcelas: um modelo demográfico, específico para cada idade, e um indicador de tendência temporal, sobre o qual são aplicados métodos de séries temporais no sentido de projectar valores futuros para os indicadores de mortalidade. Formalmente, o método define-se pela seguinte representação log-bilinear para a taxa de mortalidade (Bravo, 2007)

$$\ln(m_{xt}) = \alpha_x + \beta_x k_t + S_{xt}, \dots, \quad S_{xt} \sim (0, \sigma^2) \quad (1)$$

$$X = 1, \dots, X, \quad \wedge \quad t = 1, \dots, T$$

Com:

$$m(x, t) = D(x, t)/E(x, t) \quad (2)$$

Onde os parâmetros têm os seguintes significados:

- m_{xt} : força de mortalidade na idade X e durante o ano t ;
- α_x : nível médio das taxas de mortalidade no tempo;
- β_x : padrão de oscilação das taxas de mortalidade;
- k_t : tendências temporais do nível de mortalidade;
- S_{xt} : ruído branco, que reflete as influências históricas específicas de cada faixa etária, não captadas pelo modelo.

onde $D(x, t)$ é o número de mortes à idade x no ano t , $E(x, t)$ é o número de vidas com idade x no meio do ano t , α_x define, para cada idade, o nível médio das taxas de mortalidade no tempo, k_t descreve as tendências temporais do nível de mortalidade, β_x simboliza o padrão de oscilação etária nas taxas de mortalidade, ou seja, mede a sensibilidade de $m(x, t)$ às variações em k_t , e termo residual S_{xt} reflecte os erros aleatórios associados à série histórica,

com um valor esperado de 0 e uma variância de σ^2 , os erros retratam a existência de uma variação irregular entre as idades e o tempo, que deriva principalmente de circunstâncias históricas e que não é observada pelo modelo.

Para que este modelo possa ter uma única solução, os autores definiram duas restrições:

$$\sum_{x \min}^{x \max} \beta_x = 1 \wedge \sum_{t \min}^{t \max} k_x = 0 \quad (3)$$

A parametrização deste modelo teve como objetivo a restrição do modelo, tornando cada vez mais eficaz a projeção da tábua de mortalidade.

$$\begin{aligned} \beta_x &\sim c\beta_x \quad k_x \sim 1 \quad k_x \quad \forall c \in \mathbb{R}, cf = 0 \\ \alpha_x &\sim \alpha_x - \beta_{xc} \quad k_t \sim k_t + c \quad \forall c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

Neste sentido a fórmula ganha uma nova restrição nos parâmetros de forma a encontrar uma solução única na projeção. As restrições colocadas assumem que a soma dos coeficientes β_x somam um ao longo das idades ($\sum \beta_x = 1$) e que a soma dos coeficientes k_t é zero ao longo do tempo ($\sum k_x = 0$). O último pressuposto implica que o parâmetro α_x seja simplesmente a média empírica de $\ln(m_{xt})$ ao longo do tempo para cada idade α_x .

3.2. Tipos De Obrigações De Longevidade

Existem vários tipos de obrigações e diversos mercados através dos quais podem ser comercializados. Conhecer as diferenças e as características específicas de cada emissão de obrigações permite ao emitente perceber os riscos em que incorre, por outro lado permitindo uma boa cobertura de risco. No entanto as obrigações envolvem diversos riscos que devem ser cautelados quer pelo emitente das obrigações, quer por investidor.

3.2.1. Obrigações de Longevidade

O risco de longevidade é a probabilidade de qualquer pessoa superar a esperança de vida inicialmente estimada. Os bancos e outros participantes no mercado criaram variações de “obrigações de mortalidade”, cujo valor cai se as mortes ocorrerem mais cedo do que o esperado, e “obrigações de longevidade” que se movem no sentido oposto. As obrigações de longevidade ajudam os regimes de pensões a lidar com o aumento da esperança de vida.

As obrigações de longevidade são um instrumento financeiro, cujos payoff estão diretamente ligados à taxa de mortalidade ou de sobrevivência. Simplificando, este índice representa a porção da população inicial viva, em algum momento futuro. Nesta investigação, o estudo será restringido ao número de sobreviventes entre os 60 anos e os 95 anos.

Tal como foi referenciado anteriormente, na primeira e segunda secção, a esperança de vida aumentou de forma constante, desde a década de 1960 e representa, neste momento, um dos principais riscos para os fundos de pensões, as seguradoras e outras empresas que subestimaram os riscos de longevidade, o que tem proporcionado o surgimento de vários produtos financeiros ligados à longevidade (mortalidade ou sobrevivência). De modo a responder a esta problemática, foram desenvolvidos dois instrumentos: os longevity bonds e os longevity mortality-linked-securities.

3.2.2. Categorias de Longevity Bonds

Existem vários tipos de obrigações de longevidade que estão divididos em duas grandes categorias. O primeiro tipo são as obrigações de longevidade de "principal em risco", das quais o Swiss Re bond é um exemplo. São obrigações de longevidade, nas quais o investidor corre o risco de perder todo ou parte do principal, se ocorrer um evento de mortalidade relevante. O segundo tipo são as obrigações de longevidade “baseadas em cupões”, de que é exemplo o título de longevidade emitido pelo EIB/ BNP. São obrigações em que o pagamento do cupão depende da mortalidade registada.

A natureza desta dependência também pode variar. O pagamento pode ser uma função suave de um índice de mortalidade ou pode ser especificado em termos de "risco", ou seja, o investidor perde parte ou todo o cupão se o índice de mortalidade ultrapassar um limite. Como esses instrumentos são projetados como instrumentos de hedge, faz sentido que essas obrigações tomem a forma de obrigações de anuidade e não tenham um pagamento final do principal. No entanto, também é possível imaginar vários tipos de obrigações de longevidade “híbridos”, como as obrigações de longevidade de pagamento do principal, nas quais o principal e o cupão estão em risco, se ocorrerem eventos de mortalidade especificados.

3.2.3. Obrigações Clássicas de Longevidade

Existem muitos tipos possíveis de obrigações de longevidade baseados em cupões. Um deles é o denominado survivor bond proposto pela primeira vez por Blake e Burrows (2001). Trata-se de um título de longevidade cujos cupões são proporcionais à taxa de sobrevivência da população de referência especificada e cujos pagamentos finais terminam, não após 25 anos, mas com a morte do último membro sobrevivente da coorte de referência. Assim, por exemplo, se a coorte de referência tiver inicialmente 65 anos e se o membro com vida mais longa sobreviver até os 115 anos, o último pagamento do vínculo de sobrevivência ocorrerá após 50 anos. Um título de longevidade clássico também pode ser considerado como tendo uma maturidade estocástica, com a variável estocástica sendo a vida útil do membro com vida mais longa da annuitant cohort. Esse título tem a atração de fornecer um hedge melhor do que um título do tipo BEI / BNP, cuja maturidade é limitada a 25 anos.

3.2.4. Obrigações de Longevidade com Cupão Zero

As obrigações de longevidade acima descritos fornecem uma série de pagamentos anuais. No entanto, tal como aconteceu no mercado de “gilts”, pode prever-se que as obrigações de longevidade com cupão zero (“longevity zeros”) possam ser emitidos ou projetados financeiramente, eliminando as obrigações de longevidade “padrão”. A atração dos zeros é que eles fornecem blocos de construção para posições personalizadas. Um espectro bidimensional dessas ligações poderia ser emitido: uma dimensão relacionada com a coorte que está a ser seguida e a outra referente à data de vencimento.

A disponibilidade de uma variedade suficiente de obrigações desse espectro bidimensional permitiria às companhias de seguros construir portfólios de obrigações de longevidade que fornecessem ajustamentos próximos às características de tamanho/idade das suas carteiras de anuidades. No entanto, parece provável que o mercado de longevity zeros seja bastante ilíquido, pois a maioria dessas obrigações seria comprada numa base de compra e manutenção.

3.2.5. Obrigações de Longevidade Diferida

Outra maneira de aumentar a atração deste instrumento é através da emissão de obrigações com datas de pagamento diferidos. Já observámos que uma crítica ao bónus de longevidade do BEI é que os pagamentos antecipados de cupões têm um risco de longevidade muito baixo associado a eles e as estimativas de Cairns et al. (2006) sugerem que os fluxos de caixa dos primeiros 10 anos apresentam um risco muito baixo. No entanto, esses fluxos de caixa também são a parte mais cara da obrigação. Para aqueles que desejam usar essas obrigações como instrumentos de hedge, elas utilizam muito capital para cobrir um longo período de pagamentos de baixo risco. Uma maneira natural de lidar com este problema é os utilizadores comprarem obrigações de longevidade com pagamentos diferidos. Os adiantamentos economizariam uma grande quantidade de capital e, portanto, aumentariam a engrenagem. Isso, por sua vez, tornaria essas obrigações de longevidade muito mais atraentes do que os instrumentos de hedge.

4. PRICING BONDS RISK PREMIUM

Com o objetivo de contemplar o risco de longevidade na simulação do índice de sobrevivência, serão adotados os seguintes métodos: wang transform e solvency capital requirement, métodos que darão origem a probabilidades de morte, “ajustadas” pelo risco de longevidade

4.1. Wang Transform

O método de wang transform é um modelo que converte os pagamentos correntes flutuantes esperados nos seus equivalentes de risco neutro, usando um preço de mercado específico de risco (neste caso, mercado de seguro).

Wang (2000) propôs uma nova abordagem universal da configuração de risco:

$$F^*(p) = \Phi(\Phi^{-1}(F^*(p)) + \lambda) \quad (5)$$

Os. parâmetros registados têm seguintes significados:

Φ : parâmetro de função de distribuição de probabilidade normal estandardizada;

λ : parâmetro com a função de ajustamento da transformada de wang “variável representativa de prêmio de risco”

F : parâmetro de função de distribuição do variável x

p : Para determinar as probabilidades de morte projetadas pelo modelo Lee Carter Poisson, aplicar-se-á a seguinte fórmula:

$${}_xq_x^\lambda = \Phi[\Phi^{-1}({}_tq_{x^{BE}})] + \lambda) \quad (6)$$

${}_xq_x^\lambda$: parâmetro que representa a probabilidade de morte ajustada pelo risco de longevidade, pela wang transform;

${}_tq_{x^{BE}}$: função representativa da melhor estimativa das probabilidades de morte, sendo assim, por cada λ adicionada, obtém-se uma transformação diferente, uma vez que esta variável é um parâmetro de ajustamento.

5. RESULTADOS

A realização desta investigação tem como objetivo a determinação do prémio de risco de longevidade, através do modelo, wang transform, demonstrando que as obrigações de longevidade devem ser consideradas pelas seguradoras e fundos de pensões para a gestão do risco de longevidade. Foram utilizados dois modelos de determinação do preço, o modelo clássico e o diferido, com taxas variáveis, ambas semelhantes à obrigação clássica emitida em 2004, pelo BNP Paribas e o Banco Europeu de investimento (EIB). Para a aplicação do estudo, foi utilizado o software de estática R e Excel ao longo deste capítulo, efetuando-se cálculos de forma isolada, ou seja, Homem, Mulher e Total, para perceber melhor o peso de cada género no pricing da obrigação de longevidade.

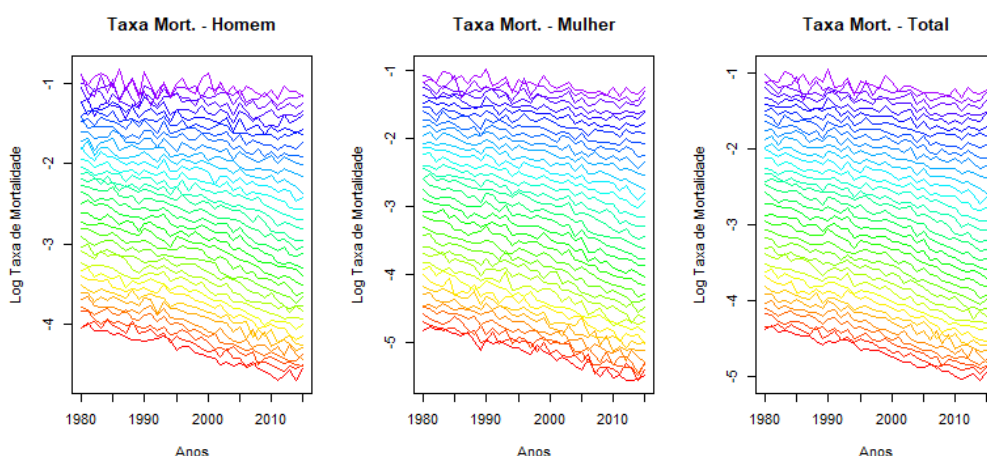
5.1. Análise de Dados

Para a aplicação das metodologias apresentadas nos capítulos anteriores, recorreu-se à utilização do site “The Human Mortality Database”, definindo-se o intervalo de confiança de 60 a 95 anos, num período temporal de 1980 a 2015, que foi o último disponível. Os dados contêm o número de mortes $D(x,t)$ e a correspondente exposição ao risco $E(x,t)$ por género e ano.

Os gráficos apresentados demonstram a evolução da população portuguesa e da taxa de mortalidade, de acordo com o intervalo de tempo selecionado, por idade, para homens, para mulheres e para o total da população, sendo a taxa de mortalidade representada por:

$$m(x, t) = \frac{D(x,t)}{E(x,t)} \quad (7)$$

Figura 1- Taxa de mortalidade anual logarítmica para a população de Portugal no período de 1980 a 2015 dos 60 aos 95 anos.



Fonte: Elaboração própria

O gráfico apresentado confirma a tendência de aumento significativo da longevidade registado nos últimos anos em Portugal, a confirmação de que as pessoas vivem cada vez mais tempo do que o expectável, ultrapassando a esperança média de vida, em relação inversa com o decréscimo do logaritmo das taxas de mortalidade em todas as idades.

5.2. Estimativa dos Parâmetros do Modelo Lee-Carter Poisson pela Função da Máxima Verosimilhança

Nesta abordagem, os parâmetros α_x , β_x e k_t são determinados pela maximização do logaritmo da função de verosimilhança que é dada por:

$$L(\alpha, \beta, k) = \ln \left\{ \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\lambda_{x,t}^{d_{x,t}} e^{-\lambda_{x,t}}}{(d_{x,t})} \right) \right\} \quad (8)$$

Neste caso, o parâmetro $\lambda_{x,t}$ representa o número esperado de óbitos na idade x e no ano t , ou seja:

$$\lambda_{x,t} = E[D_{x,t}] = E_{x,t} e^{\alpha_t + \beta_x k_t} \quad (9)$$

A presença do termo $\beta_x k_t$ não permite que se tenha um modelo linear. Os autores propõem a aplicação de um método iterativo, desenvolvido por Goodman (1979), baseado no algoritmo de Newton-Raphson. Este método consiste em atualizar, na $(v+1)$ ésimia iteração, um conjunto de parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ enquanto o outro parâmetro se mantém fixo, recorrendo ao seguinte esquema:

$$\hat{\theta}_j^{(v+1)} = \hat{\theta}_j^{(v)} - \frac{\frac{\partial \mathcal{L}^{(v)}}{\partial \theta_j}}{\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(v)}}{\partial \theta_j^2}} \quad (10)$$

Para determinar o algoritmo é necessário fixar os valores iniciais dos parâmetros $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, k^{(0)}) = (0, 1, 0)$ e depois atualizar os parâmetros:

$$\alpha_x^{(v+1)} = \alpha_x^{(v)} + \frac{\sum t(d_{x,t} - d_{xt}^{(v)})}{\sum t(d_{xt}^{(v+1)})}, \quad \beta_x^{(v+1)} = \beta_x^{(v)}, \quad k_t^{(v+1)} = k_t^{(v)} \quad (11)$$

$$k_t^{(v+2)} = k_t^{(v+1)} + \frac{\sum x(d_{x,t} - d_{xt}^{(v+1)})}{\sum x d_{xt}^{(v+1)} (\beta_x^{(v+1)})^2}, \quad \beta_x^{(v+2)} = \beta_x^{(v+1)}, \quad \alpha_x^{(v+1)} = \alpha_x^{(v+1)}$$

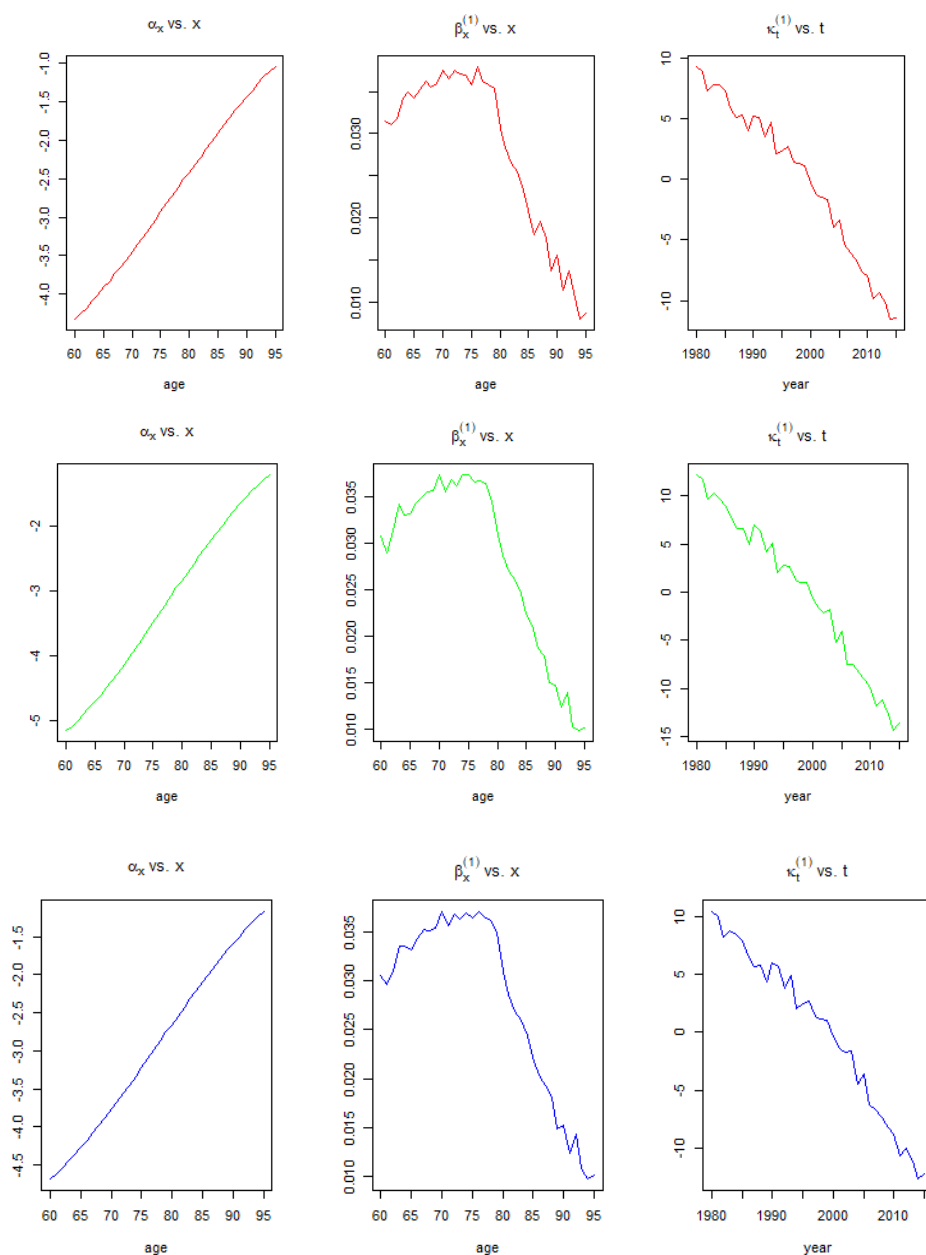
$$\beta_x^{(v+3)} = k_x^{(v+2)} + \frac{\sum t(d_{x,t} - d_{xt}^{(v+2)})}{\sum x d_{xt}^{(v+2)} (k_t^{(v+1)})^2}, \quad \alpha_x^{(v+2)} = \beta_x^{(v)}, \quad k_t^{(v+3)} = k_t^{(v+2)}$$

As estimativas dos parâmetros (α, β, k) através do modelo de Lee-Carter Poisson são:

$$\alpha = \{\alpha_x, x = (60, \dots, 95)\}, \beta = \{\beta_x, x = (60, \dots, 95)\} \text{ e } k = \{k_x, t = (1980, \dots, 2015)\}$$

Pelo método da máxima verosimilhança, para homens, mulheres e total da população, encontram-se representados nos gráficos seguintes e os valores obtidos podem ser encontrados no Anexo A.

Figura 2 - Estimativa dos parâmetros α_x , β_x e k_t através do modelo de Lee Carter-Poisson para as idades compreendidas entre 60 e 95 anos (homens a vermelho, mulheres a verde e o total a azul)



Fonte: Elaboração própria

O gráfico representativo da variável alpha apresenta um sentido crescente, tal como seria expectável, uma vez que representa a taxa de média de mortalidade, ou seja, à medida que a idade avança, a tendência é para que a mortalidade aumente também.

Os parâmetros de beta e kappa apresentam valores mais elevados para idades inferiores, assumindo maioritariamente uma trajetória decrescente. Semelhante aos resultados registados no modelo Lee e Carter (1992), assume-se que os parâmetros α_x e β_x são constantes no tempo, o que releva a necessidade de uma projeção de parâmetros da tendência temporal k_t , para a obtenção da mortalidade por idade e ano cronológico, para tal, tendo-se recorrido ao modelo ARIMA (p,d,q)¹

5.3. Seleção do Modelo ARRIMA

Modelo de descrição probabilística de uma série temporal. Normalmente utilizado na moldagem e previsão de séries temporais, como a tábua de mortalidade ou longevidade. Este modelo foi sistematizado em 1976, pelos estatísticos George Box e Gwilym Jenkins. O primeiro passo seguido na aplicação do modelo ARIMA passa pela especificação de uma classe de modelos, a identificação de um modelo, com base na análise de autocorrelação, de estimação de parâmetros do modelo identificado (neste caso, as estimativas preliminares, encontradas na fase de identificação, serão utilizadas como valores iniciais desse procedimento) e, por fim, de verificação do modelo ajustado, através de uma análise de resíduos.

O principal objetivo da utilização da moldagem é uma série temporal univariada, ou seja, uma série temporal que consiste em observações únicas, registradas sequencialmente durante o crescimento, iguais no tempo. Neste sentido, a utilização da palavra univariada, deve-se ao facto da existência de uma variável dependente, ou seja, da função $y=f(t)$. Neste, sentido a variável independente é designada por t e a variável dependente por y .

Um dos principais objetivos da utilização deste modelo, foi a verificação da estacionariedade da série ou da convergência da série, ou seja, a confirmação de que a série flutua em volta da média, ao longo do tempo, o inverso representando a não estacionariedade da série, significando que não existe convergência, ou seja, que existem tendências ascendentes e descendentes, registradas ao longo do tempo.

Neste caso, uma série é considerada estacionária se, para todo o t , se têm os valores da média, variância e convergência constantes.

Inicia-se pela realização do teste Dickey-Fuller aumentado (ADF) para verificar a estacionariedade da série, com as seguintes hipóteses:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 \text{ Tem raiz unitária (não é estacionária)} \\ H_1 \text{ Não em raiz unitária (é estacionária)} \end{array} \right.$$

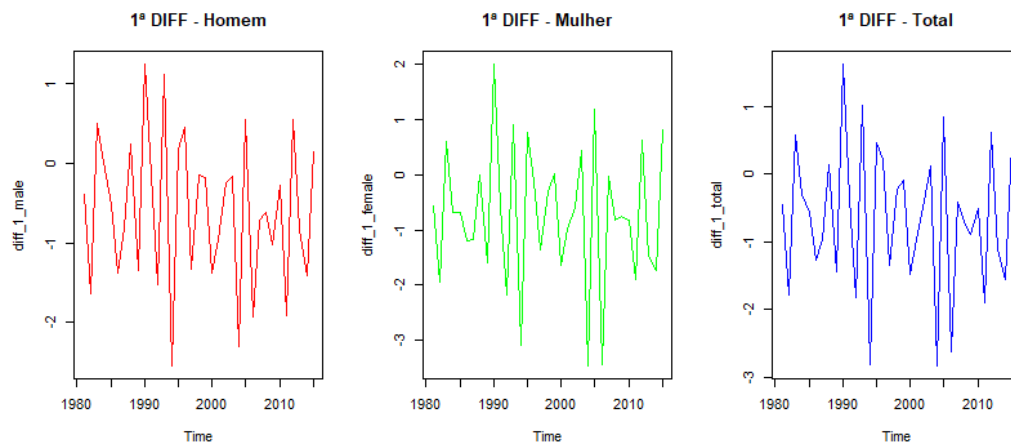
Tabela 1 - Teste ADF para a série kt e para primeiras diferenças

	Série Original kt			Série Δkt		
	Teste Estatístico	Lag	P-value	Teste Estatístico	Lag	P-value
Homens	0.0005898	0	0.9808	38.42	0	$5.383e^{-07}$
Mulheres	0.0809	0	0.7778	47.27	0	$7.496e^{-08}$
Total	0.01729	0	0.8962	43.43	0	$1.718e^{-07}$

Fonte: Elaboração própria

Tendo em conta os valores registados da série Δkt , o p-value para Mulher, Homem e Total é < 0.05 (nível de significância normalmente adotado), assim sendo, não rejeitamos a hipótese nula, uma vez que existem evidências da estacionariedade da série, pelo que não será realizado um segundo teste. Na figura que se segue, pode-se verificar essa evidência.

Figura 3 - Série Δkt e Respetivo Gráfico ACF e PACF para Homens, Mulheres e Total da População na primeira diferença.

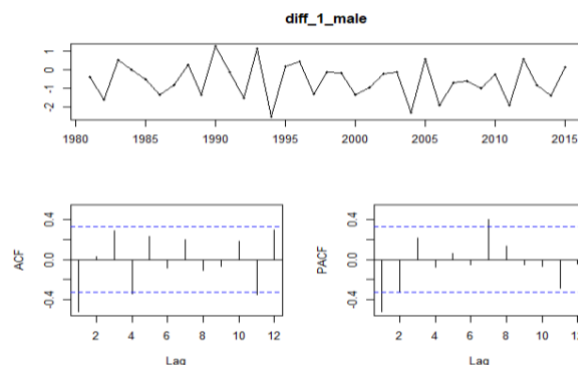


Fonte: Elaboração própria

Tal como podemos verificar no gráfico apresentado, através da primeira diferença, já se conseguem encontrar algumas evidências da estacionariedade da série se traçarmos uma reta, ela irá coincidir em dois pontos, ou seja, dá-se a repetição de um acontecimento, o que confirma a teoria da estacionariedade da série, uma vez que, para uma série ser considerada estacionária, terá de se verificar a repetição do acontecimento, no mínimo, ter dois pontos na reta. Neste caso, o p-value é inferior a 0.05. Assim sendo, não rejeitamos a hipótese nula, uma vez que há provas da estacionariedade da série, neste sentido, utilizaremos o modelo ARIMA para a projeção futura com $p=0$.

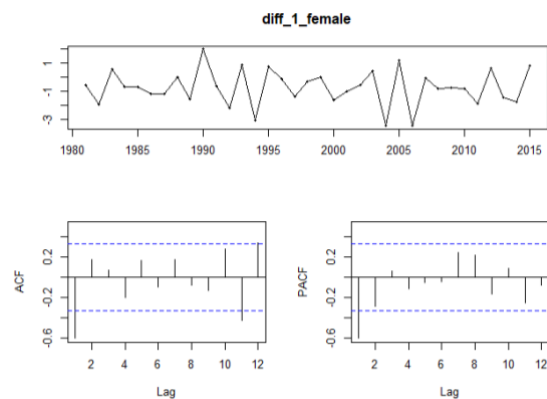
Nas figuras seguintes, serão analisadas a função de autocorrelação (ACF) e a função de autocorrelação parcial (PACF), para a série original e a primeira diferença, que poderão fornecer uma ideia geral do comportamento dos dados.

Figura 4 - - Série Δkt e Respetivo Gráfico ACF e PACF para Homens



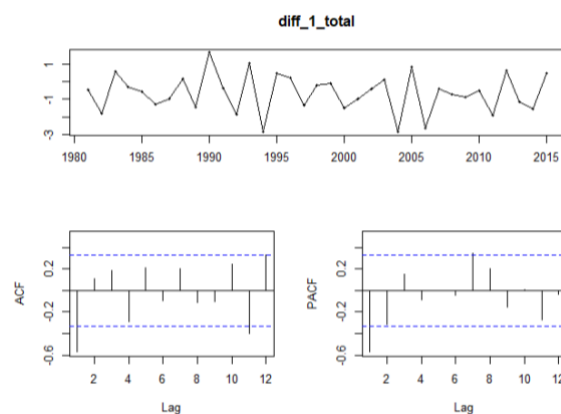
Fonte. Elaboração própria

Figura 5 - Serie Δkt e respetivo gráfico ACF e PACF para Mulheres



Fonte: Elaboração própria

Figura 6 -Serie Δkt e respetivo gráfico ACF e PACF para Total da população



Fonte: Elaboração própria

Durante o período observado, verifica-se que os valores de ACF e PACF se encontram largamente dentro do intervalo de confiança (linha tracejada a azul), ou seja, os valores encontram-se dentro do intervalo de p-value 0.05, exceto em alguns pontos sem representação, o que poderá ser explicado por um determinado acontecimento.

Porém, maioritariamente os valores registados encontram-se dentro do intervalo de confiança, mostrando assim a não existência da autocorrelação da série, confirmando assim a hipótese de estacionariedade diferenciada.

Para seleccionar a ordem do modelo, são testadas diferentes combinações usando os indicadores BIC (Bayesian Information Criterion) e AIC (Akaike Information Criterion), como critérios de escolha.

Tabela 2 - Seleção da ordem do modelo ARIMA

Modelo	Homem		Mulher		Total	
	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
ARIMA (1,1,0)	109.43	111.76	118.41	131.58	118.21	121.38
ARIMA (1,1,1)	111.69	116.44	117.34	128.32	118.03	126.54
ARIMA (2,1,0)	108.87	113.62	103.66	109.88	94.64	100.86
ARIMA (2,1,1)	86.48	94.25	111.83	118.16	102.96	109.30

Fonte: Elaboração própria

O modelo ARIMA (2,1,1) é o melhor modelo para Homens, o ARIMA (2,1,0) é o melhor modelo para Mulheres e para o Total. Estes valores foram selecionados, uma vez que apresentavam valores mais baixos nos critérios considerados para homens, mulheres e para o total da população portuguesa. Assim sendo, concluímos que este é o nosso melhor modelo para a estimação de kt , uma vez que, quanto menor forem os valores registados nestes critérios, melhor será a análise. Neste caso, AIC aproxima-se mais da realidade da situação, enquanto BIC se ajusta mais à perfeição.

5.4. Estimativa Dos Parâmetros Do Modelo Arima

As maiorias das séries temporais não apresentam estacionariedade na primeira diferença, ou seja, apresentam alguma tendência, a sua média aumenta ou diminui em algum momento ao longo do tempo. Proceder-se-á à estimação de um modelo ARIMA (2,1,0)

$$y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (12)$$

onde $y_t = k_t - k_{t-1}$, e de modelo ARIMA (2,1,1), i.e.,

$$y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (13)$$

Tabela 3 - Estimativa dos parâmetros do modelo ARIMA

ARIMA	θ	s.e. θ	Variância σ^2
Homem (2,1,0)	-0.6016	0.0717	0.1881
Mulher (2,1,1)	-0.7559	0.0773	0.1620
Total (2,1,1)	-0.6590	0.0693	0.1607

Fonte: Elaboração própria

O parâmetro θ representa o “drift” e mede a média das alterações anuais da série, e a variável ε_t representa o erro não registado, desta forma obtendo-se os seguintes resultados:

5.4.1. Análise dos Resíduos

O método dos mínimos quadrantes ordinários, procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados, tentando minimizar a soma dos quadrantes das diferenças entre o valor estimado e os dados observados (tais diferenças chamam-se resíduos). Para analisar se o modelo ARIMA estimado representa adequadamente os dados, iremos verificar se os resíduos constituem a realização de um processo do tipo ruído não correlacionado. Para tal, realizar-se-á o Teste de Ljung e Box (1978), em que a estatística é distribuída por um Qui-quadrado e constituído pelas seguintes hipóteses:

Os resíduos são i.i.d

$$\left\{ \begin{array}{l} H0 \text{ Os resíduos são i.i.d} \\ H1 \text{ Os resíduos não são i.i.d} \end{array} \right.$$

Tabela 4 - Teste de independência dos resíduos de Box-Ljung para o melhor modelo ARIMA.

	Q*	Lags	P-value
Homem (2,1,1)	6.9132	7	0.07472
Mulher (2,1,0)	5.9782	7	0.2008
Total (2,1,0)	8.4449	7	0.07658

Fonte: Elaboração própria.

Com base no nível de confiança estimado (α) de 0.05, não rejeitamos a hipótese nula, uma vez que os registos são dependentes. Para reforçar a tese, será analisado o grau de ajustamento dos resíduos à distribuição normal, através do teste de Shapiro-Wilk, que se obtém através da seguinte fórmula:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{Os resíduos provêm de uma população normal} \\ H_0 : \text{Os resíduos não provêm de uma população normal} \end{array} \right.$$

Tabela 5 - Teste de normalidade dos resíduos Shapiro-Wilk

	W	P=	value
Homens	0.98745	0.949	
Mulheres	0.97854	0.6927	
Total	0.98023	0.7532	

Fonte: Elaboração própria

Tendo em conta os valores de p-value registados para Mulheres, Homens e para o total esa 0.05, não rejeitamos a hipótese nula, uma vez que existem evidências de que os resíduos provêm de uma distribuição normal.

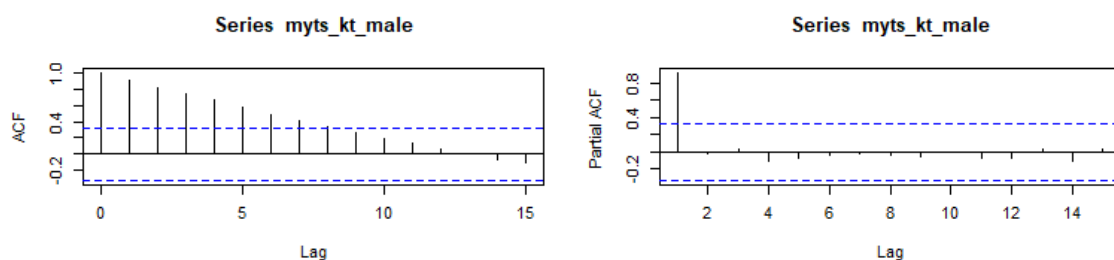
Adicionalmente, elaboraram-se o QQ-plot normal, o ACF dos resíduos, os p-values dos resíduos e o histograma dos resíduos, que se seguem nas seguintes figuras, onde podemos verificar que a distribuição se ajusta à normalidade standardizada, reforçando a conclusão dos testes anteriores.

Tabela 6 - Teste de variância e média dos resíduos

	Var	Média
Homem	0.5085893	-0.002606224
Mulher	0.8836434	-0.004642702
Total	0.6842543	-0.004290051

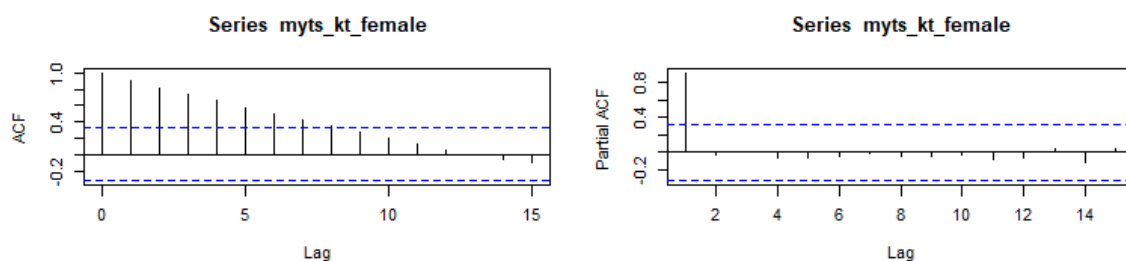
Fonte: Elaboração Própria

Figura 7 -ACF, P-values e estandardização de resíduos, homens.



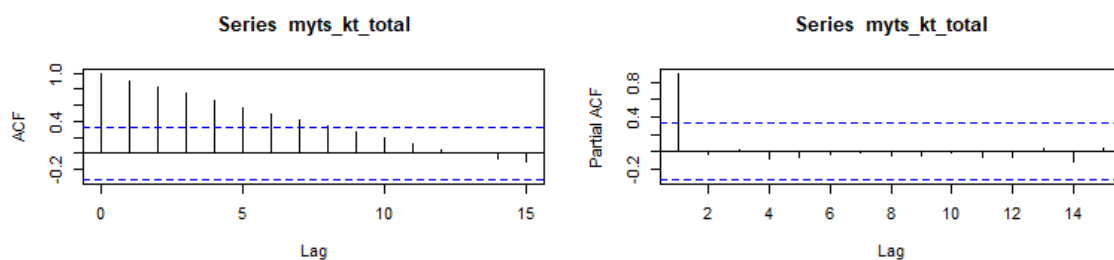
Fonte: Elaboração Própria

Figura 8 - ACF, P-values e Estandarização de Resíduos, Mulheres



Fonte: Elaboração Própria

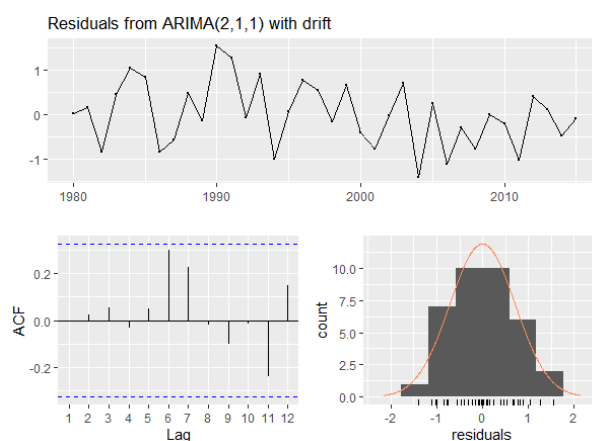
Figura 9 - ACF, P-values e Estandarização de Resíduos, Total da População.



Fonte: Elaboração Própria

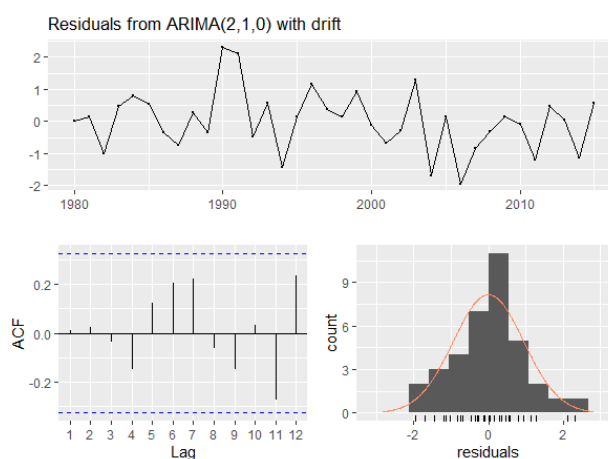
Complementarmente, com a análise de histograma, lag e gráfico, pretende-se reforçar a tese de que os dados analisados se ajustam à distribuição normal estandardizada, como se consegue ver nas figuras que seguem:

Figura 10 -Gráfico, Histograma, Lag dos resíduos para Homens



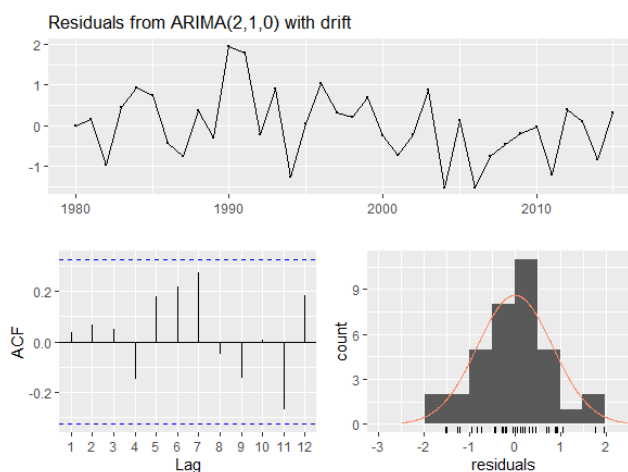
Fonte: Elaboração Própria

Figura 11- Gráfico, Histograma, La e QQ-plot dos resíduos para Mulheres



Fonte: Elaboração Própria

Figura 12 - Gráfico, Histograma, Lag e QQ-plot dos resíduos para Total da população



Fonte: Elaboração Própria

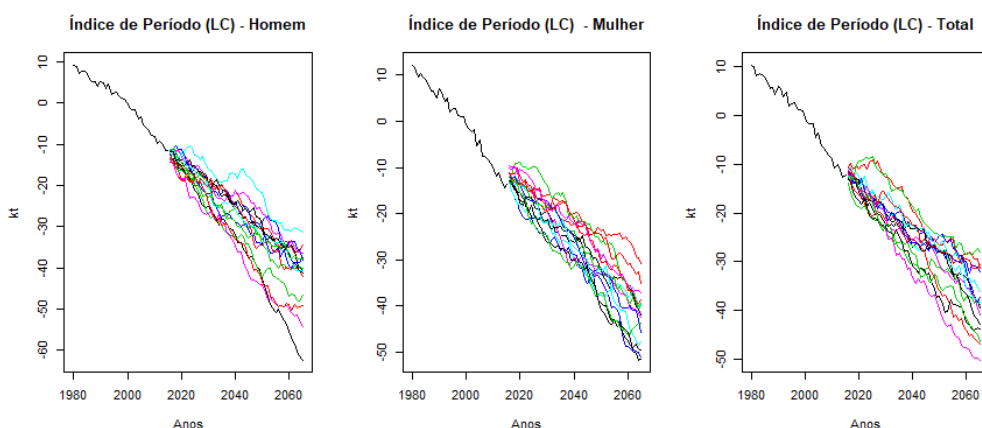
A conclusão a retirar desta análise é que os resíduos seguem uma distribuição normal, com valores que andam à volta da média.

5.4.2. Projeção da tendência de Série Temporal

Para a realização da projeção da mortalidade do modelo Lee-Carter Poisson, recorreu-se à projeção futura de kt pelo nosso best model ARIMA para Homem, Mulher e Total, num horizonte temporal de 50 anos, ou seja, de 2016 a 2065. Os valores utilizados para a projeção podem ser consultados no Anexo B.

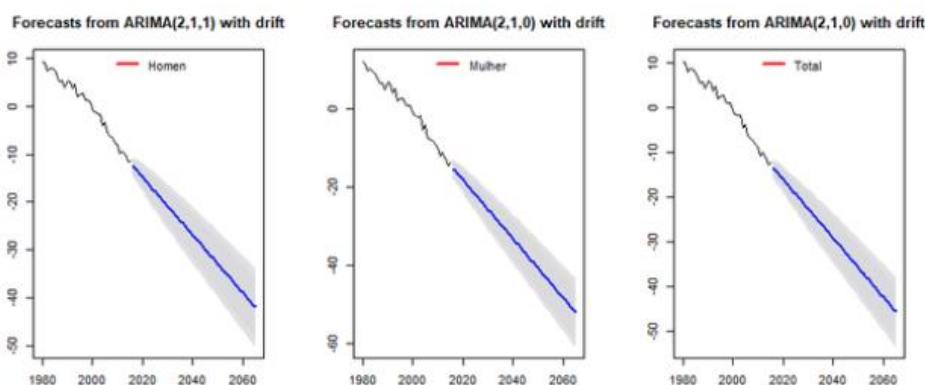
Adicionalmente, analisarei os dados relativos aos anos de 1980 a 2015, ou seja, dados da série originais.

Figura 13 - Análise Diferida da Variável kt nos Últimos 85 Anos



Fonte: Elaboração própria

Figura 14 - Projeção Futura para 50 Anos da Variável kt por um Passeio Aleatório com Drift com um Intervalo de Confiança de 95% a 99%.



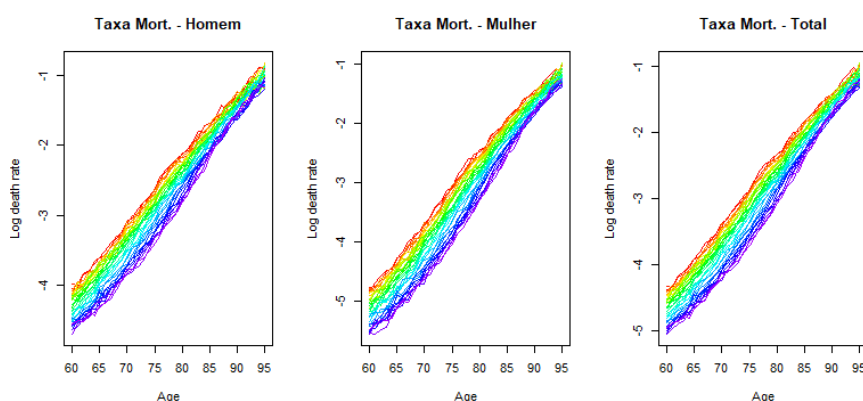
Fonte: Elaboração própria

A kt projetada é representada pela linha azul, os círculos representam o kt observado e o intervalo de confiança de 95% a 99% é representado a sombreado. Como se pode verificar na figura acima apresentada, o intervalo de confiança aumenta a sua amplitude ao longo dos anos (50 anos), o que representa um aumento do risco, ou seja, a incerteza associada as previsões futuras.

5.6. Tábua de Mortalidade

Após a análise da projeção de valores de kt , estimou-se a tábua de mortalidade prospectiva da população portuguesa com 60 anos até 2065. A tábua de mortalidade prospectiva inclui incrementos futuros na longevidade. Desta forma, podemos analisar a evolução da mortalidade projetada da população portuguesa, para os períodos considerados, representadas nas seguintes figuras.

Figura 15 - Evolução de u_x , t Ajustadas ao Modelo de Lee-Carter Poisson



Fonte: Elaboração Própria.

Com este gráfico, conclui-se que apresentam um decréscimo mais acentuado nas idades iniciais, ou seja, a partir dos 60 anos, por outro lado, essa trajetória descendente é registada em todas as idades, como seria esperado, o que nos mostra claramente a tendência de aumento da esperança média de vida em Portugal.

5.7. Pricing da Obrigação de Longevidade

Como referência do pricing da obrigação de longevidade, será feita uma simulação semelhante à longevity bond lançada pelo EIB/BNP Paribas, para homens, mulheres e total da população portuguesa. Os tipos de obrigações utilizadas (clássica e diferida) serão estimadas para uma faixa etária com 60 anos, à data de 31 de dezembro de 2018, com uma maturidade de 20 anos.

5.7.1. Cupões da Obrigação de Longevidade

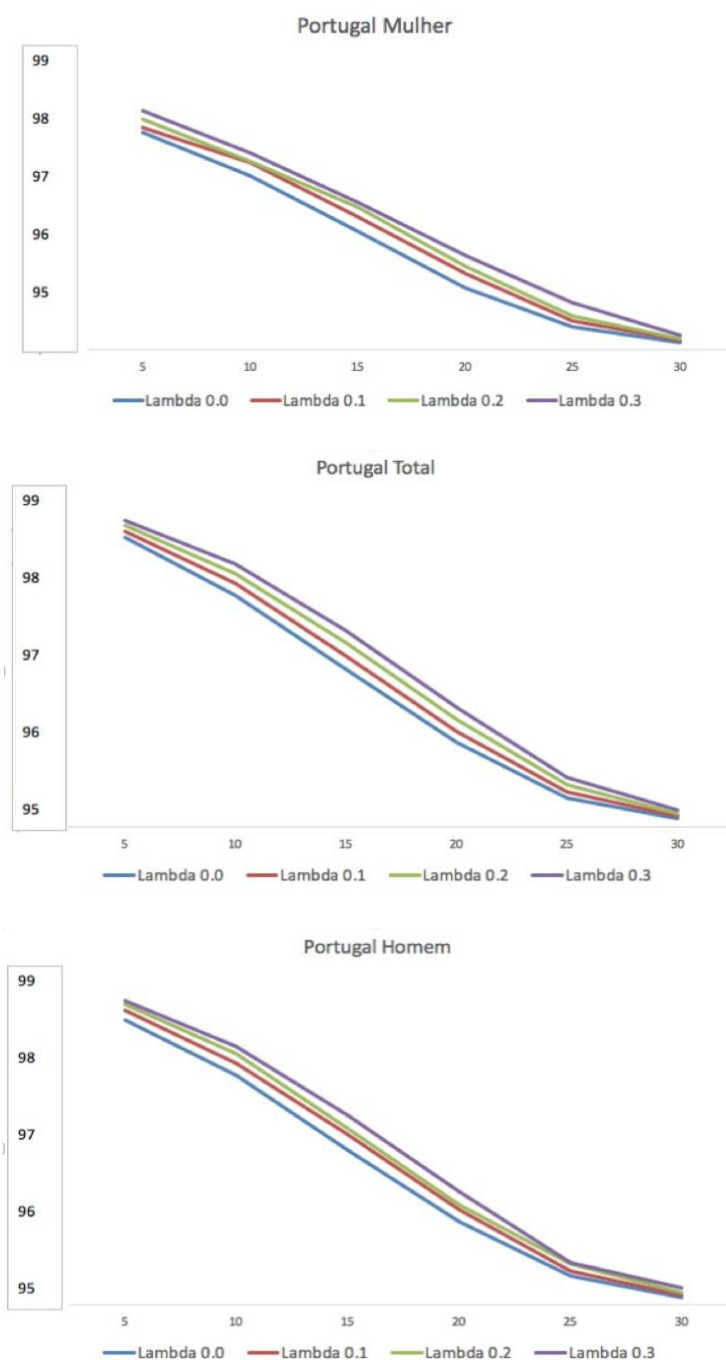
Os cupões da obrigação de longevidade são anuais e indexados ao índice de sobrevivência, assumido pela função:

$$C = 1000 S_{60}(t), t = 1, 2, 3; \dots; T = 30 \quad (13)$$

Em que o índice de sobrevivência, $S_{60,t}$ representa a proporção de indivíduos com 60 anos no período $t = 0$, assumindo-se que irão sobreviver até ao período t .

Os cupões diminuirão em função do tempo, ou seja, tendo em conta o número de indivíduos com 60 anos, no período $t=0$, que permanecem vivos em cada período, ou seja, $T = 1, 2, 3, \dots, 30$. Os cupões serão pagos até o último membro do grupo morrer, até à maturidade do contrato.

Figura 16 - Evolução dos Cupões ao longo da maturidade da obrigação de longevidade segundo abordagem de Wang Transform.



Fonte: Elaboração Própria

Como se pode verificar na figura 15, o índice de sobrevivência é superior para as mulheres. Como vivem durante mais tempo, o investidor solicita pagamentos superiores para assumir o risco de longevidade para o sexo feminino. Na figura 16, podemos verificar que os cash flows diminuem ao longo do tempo, pelo que o emissor irá pagar cada vez menos. Neste sentido o emitente da obrigação ganha se o índice for menor que o esperado e perde caso se registre o inverso, ou seja, o emissor “ganha” se morrerem mais pessoas do que o esperado em cada ano.

5.7.2. Estimação do Preço de uma Obrigação de Longevidade Clássica.

Assumindo uma taxa de cupão fixa de 5%, uma dada yield curve de 3% e uma maturidade de 30 anos, e considerando uma obrigação clássica, ou seja, o cliente comprou no momento 0 e espera o reembolso até à maturidade, obtêm-se os seguintes preços.

Tabela 7 - Preço de obrigação de longevidade clássica

Preço	$\lambda = 0.0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.3$
Homem	1226,30€	1255,40€	1284,47€	1313,48€
Mulher	1347,62€	1377,23€	1406,50€	1435,33€
Total	1291,15€	1321,10€	1350,89€	1380,43€

Fonte: Elaboração própria

Através deste método, podemos verificar que o preço da obrigação aumenta quando aumenta o lambda (factor de risco), ou seja, existe uma correlação entre as variáveis, ou seja, o preço depende do nível de risco esperado, em que o lambda representa o risco ajustado à probabilidade de morte. Por outro lado, podemos também verificar uma diferença nos preços, em função do género, em que a longevidade de uma obrigação de mulher regista valores superiores aos do homem, diferença essa explicada pelo facto de a mulher apresentar uma esperança média de vida superior à do homem, o que revela um maior risco, uma vez que a longevidade de uma obrigação está ligada à longevidade de uma pessoa, ou seja, quanto mais tempo viver maior será o risco para as seguradoras e os fundos de pensões.

5.7.3. Estimação do Preço de uma Obrigação de Longevidade Diferida.

Assumindo uma taxa de cupão fixa de 5%, uma yield curve de 3% e uma maturidade de 30 anos, e considerando uma obrigação diferida, ou seja, o cliente só começa a receber cinco anos depois da data prevista para o primeiro pagamento, obtêm-se os seguintes preços.

Tabela 8 - Preço da obrigação de longevidade diferida por cinco anos.

Preço	$\lambda = 0.0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.3$
Homem	1102,63€	1128,74€	1284,47€	1180,96€
Mulher	1236,83€	1264,00€	1290,86€	1317,33€
Total	1146,54€	1173,14€	1199,59€	1225,82€

Fonte: Elaboração própria

Verifica-se que o preço da obrigação aumenta, quando aumenta o lambda, ou seja, existe uma correlação entre as variáveis, ou seja, o preço depende do registo do lambda, que, neste caso, representa um risco ajustado à probabilidade de morte. Por outro lado, podemos verificar também uma diferença nos preços, em função do género, em que a longevidade de uma obrigação de mulher regista valores superiores aos do homem, diferença essa explicada pelo facto de a mulher apresentar uma esperança média de vida superior à do homem, o que revela um maior risco, uma vez que a longevidade de uma obrigação está ligada à longevidade de uma pessoa, ou seja, quanto mais tempo viver, maior será o risco para as seguradoras e os fundos de pensões.

Comparando com a obrigação clássica, chega-se à conclusão de que a obrigação diferida é mais barata, apresentando valores mais baixos, tal como se pode verificar na tabela 8,

confirmando a teoria de que quanto maior for o diferimento das obrigações mais baratas serão as obrigações.

5.8. Análise de Sensibilidade

Para a realização da simulação, alterou-se a idade-base da geração de referência, de modo a verificar o seu impacto no preço das obrigações. Assumindo o valor máximo para $\lambda = 0.3$, considerando as idades entre os 70 anos e os 80 anos, em vez de se considerar os 60 anos como cenário-base, obtêm-se os seguintes resultados:

Tabela 9 - Preço de longevidade da obrigação em diferentes idades

Preço	70 anos	80 anos
Homem	1093,45€	887,29€
Mulher	1097,37€	955,21€
Total	1066,00€	841,37€

Fonte: Elaboração própria

Conclui-se que existe uma relação direta entre a idade e o preço da obrigação de longevidade, uma vez que, quando aumenta a idade, diminui o preço da obrigação, explicado pelo facto de as taxas de mortalidade serem superiores para a população mais idosa do que os 70 anos, pois esta tem mais probabilidade de sobreviver até aos 71, do que uma pessoa com 80 anos sobreviver até aos 81.

Tabela 10 - Impacto da maturidade no preço da obrigação

Preço	30 anos	15 anos
Homem Clássica	1313,48€	928,87€
Homem Diferida	1180,96€	758,42€

Preço	30 anos	15 anos
Mulher Clássica	1435,33€	982,83€
Mulher Diferida	1317,33€	878,76€

Preço	30 anos	15 anos
Total Clássica	1380,43€	972,62€
Total Diferida	1225,82€	681,06€

Fonte: Elaboração Própria

6. CONCLUSÃO

O risco de longevidade existe há muito tempo, mas a sua relevância só começou a ser considerada e reconhecida nos balanços das empresas recentemente. Com implicações diretas para os fornecedores de produtos expostos ao risco de longevidade, caso dos fundos de pensões e das seguradoras de vida, cuja capacidade de cumprir as suas promessas depende, em grande parte, da gestão do risco de longevidade.

Esse factor tem uma grande importância para os segurados, cujas reformas podem ser destruídas se os provedores de pensão falharem no seu fornecimento. As dificuldades da Equitable Life, há alguns anos, demonstram muito bem esse perigo. O problema de como viver com o risco de longevidade não desaparece e é um motivo de preocupação para todos os que pensam reformar-se.

Atualmente, o risco de longevidade tem cada vez mais importância económica para a sociedade, pelo facto de cada vez mais, a esperança média de vida continuar a crescer de uma forma acelerada e a fecundidade se apresentar na trajetória inversa, ou seja, cada vez nascem menos criança. Outros problemas associados a este paradigma, residem principalmente na debilidade da economia portuguesa e no facto de existirem salários baixos, o que não dá segurança aos jovens para poderem ter uma visão positiva e a nível financeiro ou pensarem se quer em ter filhos. Esse desequilíbrio, acompanhado das novas exigências, impostas pela autoridade reguladora das seguradoras e dos fundos de pensões, para identificar e separar os riscos efetivos das suas atividades: risco de mercado, risco de crédito, risco operacional, entre outros, faz com que cada vez mais exista uma necessidade de quantificar e cobrir esses riscos.

Esta investigação teve como base a simulação do preço de duas obrigações de longevidade, com a maturidade de 30 anos, uma clássica e uma diferida a cinco anos. Neste sentido, recorreu-se à utilização do modelo de Lee-Carter Poisson para projetar as taxas de mortalidade futuras para os dados da população portuguesa com idades compreendidas entre os 60 e os 95 anos, separados em homens, mulheres e total da população.

Posteriormente, introduziu-se o risco de longevidade, através das abordagens de wang transform, com o objetivo de produzir um índice de sobrevivência ajustado ao risco, para ser contemplado no cálculo do pricing, neste caso, ao se compararem dois tipos de obrigações (clássica e diferida), através do método de cálculo do prémio de mercado, efetuando assim uma análise por género, diferentes idades e maturidades, e níveis de risco.

Como os cupões das obrigações de longevidade vão decrescendo com o passar dos anos, concluiu-se que o preço da obrigação de longevidade clássica é bastante superior ao preço da diferida, uma vez que a obrigação diferida exclui os primeiros cinco anos de pagamentos, momento em que o valor dos cupões é superior.

Por outro lado, conclui-se também que o preço de uma obrigação de longevidade para o sexo feminino é superior à do sexo masculino, o que é justificado pelo facto de as mulheres apresentarem uma esperança média de vida superior à dos homens, ou seja, em média, viverem mais anos do que os homens, o que, por sua vez, representa um maior nível de risco de longevidade. Por fim, conclui-se que os preços das obrigações variam no mesmo sentido da variação da maturidade e da idade inicial.

Resumindo, a gestão do risco de longevidade e a sua transferência para o mercado de capitais é um grande desafio para os atuários e para as empresas. Atualmente, não existe um mercado a uma escala global que permita emissões de forma mais frequente e em quantidades elevadas, pelo que, com esta investigação, se pretende dar uma contribuição

ao nível do cálculo do pricing e do prémio de mercado e, por outro, alertar as companhias de seguros e os fundo de pensões para este novo paradigma, muito embora, no mercado português, a maior parte da população se encontre ligada ao fundo de pensões do estado, ainda assim, existindo uma classe de pessoas que cada vez mais se preocupa com a sua reforma, procurando alternativas nas seguradoras e nos fundos de pensões.

7. BIBLIOGRAFIA

Alai, D.H. & Sherris, M. (2011). Rethinking age-period-cohort mortality trend models. *Scandinavian Actuarial Journal*, (pp. 208–227).

Alho, J. Bravo, J. M. & Palmer, E. (2013). Annuities and Life Expectancy in NDC. in: Holzmann, R., Palmer, E., Robalino, Non-Financial Defined Contribution Pension Schemes in a Changing Pension World, Politics and Financial Stability. World Bank Publications, Vol. 2, Washington, 2012, (pp. 395-436).

Alho, J.M. (2002). Discussion of Lee (2000). *North American Actuarial Journal* 4 (pp. 91-93).

Ayuso, M., Bravo, J. M. & Holzmann, R. (2017). Addressing Longevity Heterogeneity in Pension Scheme Design. *Journal of Finance and Economics*. Volume 6, No. 1 (2017), (pp. 1-21).

Ayuso, M., Bravo, J. M. & Holzmann, R. (2017). On the Heterogeneity in Longevity among Socioeconomic Groups: Scope, Trends, and Implications for Earnings-Related Pension Schemes. *Global Journal of Human Social Sciences - Economics*, Volume 17 Issue 1 Version 1.0, 31-57.

Ayuso, M., Bravo, J. M., & Holzmann, R. (2020). Getting Life Expectancy Estimates Right for Pension Policy: Period versus Cohort Approach. *Journal of Pension Economics and Finance*, 1-20. doi:10.1017/S1474747220000050.

Barbarin, J. (2007). Heath-Jarrow-Morton Modelling of Longevity Bonds and the Risk Minimization of Life Insurance Portfolios. *SSRN Electronic Journal*.

Barrieu. P., Bensusan. H., Ravanelli. C. e Hillairet. C. (2012). Understanding. modeling and managing longevity risk: key issues and main challenges. *Scandinavian Actuarial Journal* 2012:3. 203-231.

Biffis, E & Blake. D (2018). Mortality-Linked Securities and Derivatives.

Blake, D., Cairns, A. J. G., Dowd, K. and Kessler, A.R. (2019). Still living with mortality: The longevity risk transfer market after one decade. *British Actuarial Journal*, 24,

Blake, D., Cairns, A., Coughlan, G., Dowd, K. and MacMinn, R. (2013), The New Life Market. *Journal Risk and Insurance* (pp. 501-558).

Blake, D., Cairns, A., Dowd, K., & MacMinn, R. (2006). Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging. *Journal of Risk & Insurance*, 73(4), (pp. 647–672)

Blake. D. & Burrows. W. (2001). Survival Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk. *Journal of Risk & Insurance*. 68(2). 339.

Booth, H., Maindonald, J. & Smith, L. (2002). Age-time interactions in mortality projection: applying Lee-Carter to Australia, Working Papers in Demography, Australian National University.

Bravo, J. M. & Herce, J. A. (2015). Las pensiones en España y Portugal: Descripción de los esquemas y evolución reciente comparada. In: *¿Es posible planificar la jubilación? Dos años*

del Instituto BBVA de Pensiones en España (pp. 89-126). Instituto BBVA de Pensiones, Madrid.

Bravo, J. M., & Herce, J. A. (2020). Career Breaks, Broken Pensions? Long-run Effects of Early and Late-career Unemployment Spells on Pension Entitlements. *Journal of Pension Economics and Finance* 1—27. <https://doi.org/10.1017/S1474747220000189>.

Bravo, J. M. (2007). “Tábuas de mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade”. Dissertação de Doutoramento em Economia, Universidade de Évora, Portugal.

Bravo, J. M. (2008). Pricing Longevity Bonds Using Affine-Jump Diffusion Models. 2nd Annual Meeting of the Portuguese Economic Journal, 22.

Bravo, J. M. (2012a). Sustentabilidade Financeira dos Sistemas Públicos de Segurança Social em Portugal: Situação Actual e Análise Prospectiva. Associação Portuguesa de Estudos sobre Aforro, Investimento e Pensões de Reforma, Dezembro 2012.

Bravo, J. M. (2015). Living longer and prospering? Opções de redesenho dos sistemas de pensões em Portugal. In Neto, Paulo e Serrano, Maria Manuel (coords.) (2015). Políticas Públicas, Economia e Sociedade. Contributos para a Definição de Políticas no Período 2014-2020. Nexo Literário, Alcochete.

Bravo, J. M. (2016). Sustentabilidade, Adequação e Equidade nos Sistemas de Protecção Social: O Desafio da Pirâmide Etária Invertida. in Instituto da Defesa Nacional (Coord.). Políticas 48 Públicas e o Papel do Estado no Século XXI - Ciclo de Mesas Redondas "Ter Estado", Lisboa, IDN - Instituto da Defesa Nacional, pp. 295-327 (Coleção Atena, no 36).

Bravo, J. M. (2016). Taxation of Pensions in Portugal: A Semi-Dual Income Tax System. CESifo DICE Report - Journal for Institutional Comparisons. 14 (1), (pp.14-23).

Bravo, J. M. (2019). Funding for longer lives: Retirement wallet and risk-sharing annuities. *Ekonomiaz*, 96(2), 268—291. DOI: 21100889706

Bravo, J. M. (2020). Addressing the Pension Decumulation Phase of Employee Retirement Planning. In: I. Muenstermann (Ed.). Who Wants to Retire and Who Can Afford to Retire? (pp. 1-21). IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.90807>.

Bravo, J. M. (2020). Reforma do Sistema de Pensões e Consistência Intertemporal da Protecção Social. In: L. S. Pavan (Ed.). A Economia numa Perspectiva Interdisciplinar. Atena Editora, Vol. 2. p. 75-92. DOI 10.22533/at.ed.8372019026

Bravo, J. M., & El Mekkaoui de Freitas, N. (2018). Valuation of longevity-linked life annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, 212–229.

Bravo, J. M., & Holzmann, R. (2014). The Pay-out Phase of Funded Pensions Plans: Risks and Payment Options. Instituto BBVA de Pensiones, Working Paper No 6/2014, Informe PISA sobre educación financiera OECD, June.

Bravo, J. M., & Nunes, J. P. (2020). Pricing Longevity Derivatives via Fourier Transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, in press.

Bravo, J. M., Afonso, L. e Guerreiro, G. (2013). Avaliação Actuarial do Regime de Pensões da Caixa Geral de Aposentações: Formulação Actual e Impacto das Medidas Legislativas. Ministério das Finanças, Novembro.

Bravo, J. M., Ayuso, M., Holzmann, R., Palmer, E. (2020). Addressing Life Expectancy Gap in Pension Policy. Insurance: Mathematics and Economics, in press.

Bravo, J. M., Guerreiro, G., Afonso, L. (2014). Avaliação Actuarial do Sistema Previdencial da Segurança Social e Prestação Única da Segurança Social. GEP - Ministério da Solidariedade, Emprego e Segurança Social, Lisboa, Dezembro.

Bravo, J. M., Silva, C. M. (2006). Immunization Using a Stochastic Process Independent Multifactor Model: The Portuguese Experience. Journal of Banking and Finance, 30 (1), 133-156.

Bravo, J. M., Real, P. C., Silva, C. M. (2009). Participating life annuities incorporating longevity risk sharing arrangements. Proceedings of the Innovation in Retirement Award - Programa Consciência Leve, Fidelidade - Companhia de Seguros S.A.

Bravo, J.M. (2015). Reforma Estrutural dos Sistemas de Pensões. in Viriato S. M., V., P. T. Pereira, V. S. (Coord.). Afirmar o Futuro: Políticas Públicas para Portugal, Volume I - Estado, Instituições e Políticas Sociais (pp. 264-329). Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Brouhns. N. Denuit. M. e Vermunt. J.K. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. Insurance: Mathematics and Economics 31. 340-397.

Cairns, A.J., Blake, D., Dawson, P., Dowd, K., (2005), "Pricing the Risk on Longevity Bonds", Life and Pensions, October 2005: 41–44.

Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A. & Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States. North American Actuarial Journal, 13, 1–35.

Cairns A. J. G, Blake D. and Dowd K. (2006). Stochastic lifestyling: optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans, Journal of Economic Dynamics & Control, 30, 843-877.

Chen, H., Macminn, R. D., & Sun, T. (2017). Mortality dependence and longevity bond pricing : a dynamic factor copula mortality model with the GAS structure. Journal of Risk and Insurance, 393–415.

Chen, L., Cairns, AJG & Kleinow, T. (2017). Pequenos efeitos de polarização e população de amostragem em modelagem mortalidade estocástica. Europeu Atuarial Journal, 7, 193 - 230.

Cox, S. H., Lin, Y., Tian, R., & Yu, J. (2013). Managing Capital Market and Longevity Risks in a Defined Benefit Pension Plan. Journal of Risk & Insurance, 80(3), 585.

Denuit, M., Devolder, P., & Goderniaux, A.-C. (2007). Securitization of Longevity Risk: Pricing Survivor Bonds With Wang Transform in the Lee-Carter Framework. Journal of Risk & Insurance, 74(1), 87–113.

- Hainaut, D. (2012). Multidimensional Lee-Carter model with switching mortality processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 236–246.
- Hatzopoulos, P. & Haberman, S. (2009). A parameterized approach to modeling and forecasting mortality. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 103–123.
- Hunt, A. & Blake, D. (2015). Modelling longevity bonds: analysing the Swiss Re Kortis bond. *Insurance: Mathematics and Economics*, 63, 12–29.
- Jevtic, P., Kwak, M., & Pirvu, T. A. (n.d.). Longevity bond pricing in equilibrium, Montreal Institute of Structured Finance and Derivatives.
- Lee, R. D. & Carter, L. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87 (419). 659-671.
- Levantesi, S., & Menzietti, M. (2017). Maximum Market Price of Longevity Risk under Solvency Regimes: The Case of Solvency II. *Risks*, 5(2), 29.
- Mayhew, L. & Smith, D. (2014). convergência de gênero na sobrevivência humana e o adiamento de morte. *North American Actuarial Journal*, 18 (1), 194 - 216.
- Ngai, A., & Sherris, M. (2011). Longevity risk management for life and variable annuities: The effectiveness of static hedging using longevity bonds and derivatives. *Insurance Mathematics and Economics*, 49, 100–114.
- Ribeiro, F.L. (2018). " Modelação e gestão de risco de longevidade através de Longevity Bonds". Dissertação de tese de Mestrado em Estatística e Gestão de Informação, Especialização em Análise e Gestão de Risco, Nova Information Management School, Portugal.
- Russolillo, M., Giordano, G. & Haberman, S. (2011). Extending the Lee-Carter model: a three-way decomposition. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2011(2), 96–117.
- Sherris, M. & Wills, S. (2007) Financial Innovation and the Hedging of Longevity Risk
- Thomsen, J., Andersen, V.J. (2007). Longevity Bonds – a Financial Market Instrument to Manage Longevity Risk. *Monetary Review*, 46 (4), 29-44
- Villegas, A.M. (2018). Longevity and Mortality Models. School of Risk and Actuarial Studies, CEPAR, UNSW Sydney.

8. ANEXOS

Anexo A – Parâmetros estimados pelo método de Poisson Lee-Carter para a população Portuguesa

Age	ax_male	bx_male	ax_female	bx_female	ax_total	bx_total
60	-4,333828443	0,03149187	-5,162170661	0,030745404	-4,6907048	0,03052898
61	-4,253745705	0,031116592	-5,088008728	0,028937434	-4,614038365	0,029663192
62	-4,180920229	0,031807657	-5,005953183	0,031375981	-4,539412093	0,030977329
63	-4,089805247	0,034260309	-4,912541481	0,034141393	-4,448990145	0,03351939
64	-4,016654986	0,034995251	-4,802659727	0,032956597	-4,365048056	0,033581894
65	-3,909000001	0,034186307	-4,699410646	0,033131041	-4,260782411	0,033218497
66	-3,832366717	0,035199567	-4,603310325	0,034359223	-4,179276074	0,034334129
67	-3,735256429	0,036167501	-4,496581975	0,035028215	-4,080966572	0,035240283
68	-3,643972627	0,035538114	-4,373707885	0,035523021	-3,980174902	0,035120443
69	-3,549535415	0,035933377	-4,265988146	0,035702576	-3,883157201	0,035443259
70	-3,440574921	0,037478976	-4,128410797	0,03734349	-3,765706769	0,037098774
71	-3,351545014	0,036508558	-4,014974175	0,035489238	-3,669783638	0,035722909
72	-3,254848409	0,037485001	-3,88814657	0,036795262	-3,56368578	0,036883545
73	-3,146998821	0,037078225	-3,766403097	0,036119776	-3,453177825	0,036344871
74	-3,03951707	0,036971008	-3,614590871	0,037295777	-3,329788145	0,036944277
75	-2,933344929	0,035804048	-3,493165851	0,037376768	-3,220096362	0,036418797
76	-2,823295341	0,037964615	-3,354235184	0,036524515	-3,100964481	0,037118519
77	-2,718716105	0,036282643	-3,221756395	0,036734758	-2,986763231	0,036509314
78	-2,606859659	0,035808085	-3,087445867	0,036498051	-2,867698977	0,036208451
79	-2,500218686	0,035391546	-2,951209016	0,034404299	-2,750464283	0,034959588
80	-2,423624951	0,030637617	-2,84295581	0,0309171	-2,661470702	0,030880287
81	-2,3206991	0,028291189	-2,71872796	0,02869769	-2,551023016	0,028630512
82	-2,221367183	0,026495903	-2,585927352	0,026930918	-2,437207479	0,026914323
83	-2,107722701	0,025476474	-2,45815418	0,026029554	-2,319131104	0,026004981
84	-2,010712312	0,023282822	-2,337148129	0,024610028	-2,211858568	0,02437094
85	-1,910789612	0,020935001	-2,206907043	0,022326776	-2,097334299	0,022157748
86	-1,800475552	0,01800106	-2,089681743	0,021154144	-1,985768325	0,020357996
87	-1,705465374	0,019656504	-1,978062146	0,018632934	-1,884215604	0,019309389
88	-1,611204727	0,017563308	-1,87116454	0,017882653	-1,784779347	0,018082092
89	-1,521478229	0,013671271	-1,755898231	0,014977852	-1,681200185	0,014798187
90	-1,435136596	0,015562401	-1,653138983	0,014706694	-1,586817275	0,015286598
91	-1,351194308	0,011438458	-1,559682802	0,012403983	-1,498840316	0,012360555
92	-1,25287931	0,013716196	-1,460173184	0,014014603	-1,402136284	0,014380405
93	-1,16894351	0,01119929	-1,376405791	0,010294834	-1,321199314	0,01077221
94	-1,106444769	0,007935056	-1,291459796	0,009825347	-1,244618006	0,009670601
95	-1,037265527	0,008668201	-1,208289581	0,010112073	-1,16749836	0,010186735

Anexo B – Valores Projetados de k_t e \hat{k}_t , do modelo Poisson Lee- Carter para Homens, Mulheres e para o Total da população.

	kt_male	kt_female	kt_total
1980	9,31300921	12,22633376	10,43582134
1981	8,917182835	11,66012734	9,977835809
1982	7,282415644	9,717426978	8,198895655
1983	7,787251453	10,30664295	8,771789629
1984	7,798631619	9,627829184	8,475008938
1985	7,28075961	8,95395556	7,90273024
1986	5,906299033	7,762320366	6,62779257
1987	5,08748196	6,586733907	5,662895839
1988	5,324333847	6,573880614	5,80394074
1989	3,982831981	4,984426145	4,356821606
1990	5,230132789	6,986174668	5,990869779
1991	5,083040346	6,388119057	5,646062178
1992	3,555943365	4,206695876	3,818023126
1993	4,667840578	5,104215898	4,845905246
1994	2,113130977	2,014572531	2,036807963
1995	2,293661411	2,770291655	2,499234579
1996	2,745346425	2,657508492	2,713230106
1997	1,415244032	1,295779515	1,368164042
1998	1,27115436	0,974441962	1,15751285
1999	1,093682705	0,993568665	1,079291594
2000	-0,279028167	-0,645004929	-0,405709095
2001	-1,237389495	-1,623089831	-1,362600839
2002	-1,4842803	-2,208235177	-1,758660062
2003	-1,641297408	-1,761156157	-1,635202564
2004	-3,948310222	-5,230507903	-4,478900631
2005	-3,401723168	-4,04730262	-3,627528684
2006	-5,334511738	-7,491889422	-6,244472494
2007	-6,046844037	-7,526836942	-6,650203719
2008	-6,667335124	-8,360743498	-7,354718129
2009	-7,691439872	-9,123915842	-8,24807425
2010	-7,967401453	-9,950754803	-8,7571384
2011	-9,886560829	-11,8513163	-10,66516896
2012	-9,344540361	-11,22240746	-10,04828758
2013	-10,1736335	-12,69081189	-11,16155954
2014	-11,59313965	-14,43320459	-12,71260555
2015	-11,45193886	-13,62386775	-12,25780334

Anexo C –previsão pelo método de Poisson Lee-Carter para Homem, Mulher e o Total.

	Point.Forecast	Lo.95	Hi.95	Lo.99	Hi.99
2016	-12,53687002	-14,02207999	-11,05166005	-14,48876678	-10,58497325
2017	-12,99303118	-14,6114596	-11,37460276	-15,12000667	-10,86605569
2018	-13,47905279	-15,27536914	-11,68273644	-15,83981264	-11,11829294
2019	-14,31363108	-16,43389358	-12,19336859	-17,10012834	-11,52713382
2020	-14,69640411	-16,90299666	-12,48981156	-17,59635829	-11,79644993
2021	-15,42726484	-17,86626689	-12,98826279	-18,63265688	-12,2218728
2022	-16,00236163	-18,57645905	-13,42826421	-19,38529908	-12,61942417
2023	-16,55765684	-19,2620336	-13,85328009	-20,11181037	-13,00350332
2024	-17,23312563	-20,10083249	-14,36541877	-21,00193129	-13,46431996
2025	-17,77128492	-20,74714889	-14,79542095	-21,68223312	-13,86033672
2026	-18,40649601	-21,52021149	-15,29278054	-22,4986118	-14,31438023
2027	-19,00523381	-22,23632779	-15,77413983	-23,2516111	-14,75885652
2028	-19,58979981	-22,93206071	-16,24753892	-23,98227519	-15,19732443
2029	-20,21436387	-23,67506329	-16,75366444	-24,76249387	-15,66623386
2030	-20,79787675	-24,36129256	-17,23446094	-25,48099896	-16,11475455
2031	-21,40790847	-25,07912677	-17,73669018	-26,23270716	-16,58310979
2032	-22,01014074	-25,78321398	-18,23706749	-26,96879952	-17,05148195
2033	-22,60580604	-26,4768642	-18,73474789	-27,69323882	-17,51837326
2034	-23,21442272	-27,18416636	-19,24467907	-28,43155022	-17,99729521
2035	-23,81096043	-27,87390672	-19,74801413	-29,15057697	-18,47134388
2036	-24,41457586	-28,57055793	-20,2585938	-29,87646213	-18,95268959
2037	-25,01679831	-29,26324345	-20,77035316	-30,59757322	-19,43602339
2038	-25,61641163	-29,95095045	-21,28187281	-31,31296126	-19,919862
2039	-26,22012431	-30,64190499	-21,79834362	-32,03132918	-20,40891943
2040	-26,82033921	-31,32685603	-22,31382239	-32,74290624	-20,89777218
2041	-27,4223896	-32,01254233	-22,83223687	-33,45487285	-21,38990635
2042	-28,02430282	-32,69651086	-23,35209478	-34,16462502	-21,88398061
2043	-28,62526073	-33,377935	-23,87258645	-34,87133349	-22,37918796
2044	-29,22749087	-34,05955241	-24,39542932	-35,57789619	-22,87708554
2045	-29,82872477	-34,73867344	-24,91877611	-36,28149112	-23,37595842
2046	-30,43041726	-35,41714701	-25,44368752	-36,98409106	-23,87674347
2047	-31,03215052	-36,09449069	-25,96981036	-37,68519325	-24,3791078
2048	-31,63355178	-36,77033149	-26,49677207	-38,38442466	-24,8826789
2049	-32,23534093	-37,44557167	-27,02511019	-39,08274483	-25,38793704
2050	-32,83685132	-38,11945465	-27,554248	-39,77936892	-25,89433373
2051	-33,43847046	-38,79249371	-28,08444721	-40,47484975	-26,40209117
2052	-34,04012535	-39,46463113	-28,61561957	-41,16913438	-26,91111632
2053	-34,64166907	-40,13573448	-29,14760366	-41,86209495	-27,42124319
2054	-35,24332912	-40,80610576	-29,68055247	-42,55405687	-27,93260137
2055	-35,84491269	-41,47554714	-30,21427823	-43,24482072	-28,44500465
2056	-36,44652001	-42,14420982	-30,74883021	-43,93455371	-28,95848632
2057	-37,0481447	-42,81211186	-31,28417755	-44,62328161	-29,4730078

2058	-37,64973322	-43,47921836	-31,82024809	-45,31097534	-29,98849111
2059	-38,25135608	-44,14563699	-32,35707516	-45,99775429	-30,50495787
2060	-38,85295842	-44,81132664	-32,8945902	-46,68358163	-31,02233521
2061	-39,45456521	-45,47633988	-33,43279055	-47,36851862	-31,54061181
2062	-40,05617905	-46,14070036	-33,97165775	-48,05259551	-32,05976259
2063	-40,6577814	-46,80440702	-34,51115578	-48,73581677	-32,57974603
2064	-41,25939371	-47,4675041	-35,05128333	-49,41823376	-33,10055367
2065	-41,86100068	-48,12999184	-35,59200952	-50,09985163	-33,62214974

Anexo D – Código R para obtenção dos resultados Homem, Mulher e o Total.

```

library(forecast)
library(fpp)
library(ggplot2)
library(seasonal)
library(seasonalview)
library(urca)
require(forecast)
require(urca)
library(demography)
library(gnm)
library(StMoMo)
library(fanplot)
library(demography)
library(forecast)
library(lifecontingencies)
library(LCA)
library(fanplot)
require(demography)

#Dados Mortalidade Portugal - Data Human Mortality
PtData = hmd.mx(country="PRT", username = "humanmortalitydb@hotmail.com",
password="1567170192")
summary(PtData)

#Idade e Género para o encaixe
Ptmale = StMoMoData(PtData, series="male")
ages.fit = 0:110
years.fit = 1980:2015

Ptfemale = StMoMoData(PtData, series="female")
ages.fit = 0:110
years.fit = 1980:2015

Pttotal = StMoMoData(PtData, series="total")
ages.fit = 0:110
years.fit = 1980:2015

Ptmale
Ptfemale
Pttotal

#Modelo Lee-Carter
constLC = function(ax, bx, kt, b0x, gc, wxt, ages){
c1 = mean(kt[1, ], na.rm = TRUE)
c2 = sum(bx[, 1], na.rm = TRUE)
list(ax = ax + c1 * bx, bx = bx / c2, kt = c2 * (kt - c1))}

#Definição do Modelo
LC = StMoMo(link = "log", staticAgeFun = TRUE, periodAgeFun = "NP", constFun =
constLC)

#Definição do Modelo

```

```
LC = lc()
LC
```

```
#Taxa de mortalidade por idade de homens, mulheres e o total
#Com o aumento da idade, a taxa de mortalidade é maior tanto para homens quanto para mulheres.
```

```
par(mfrow=c(1,3))
plot(PtData, series="male", datatype="rate", year = 1980:2015, main= "Taxa Mort. - Homem")
plot(PtData, series="female", datatype="rate", year = 1980:2015, main= "Taxa Mort. - Mulher")
plot(PtData, series="total", datatype="rate", year = 1980:2015, main= "Taxa Mort. - Total")
```

```
#Evolução da taxa de mortalidade ao longo do tempo.
```

```
par(mfrow=c(1,3))
plot(PtData, series="male", datatype="rate", age = 60:95, plot.type="time", main="Taxa Mort. - Homem", xlab="Anos")
plot(PtData, series="female", datatype="rate", age = 60:95, plot.type="time", main="Taxa Mort. - Mulher", xlab="Anos")
plot(PtData, series="total", datatype="rate", age = 60:95, plot.type="time", main="Taxa Mort. - Total", xlab="Anos")
```

```
#Estimar todos os modelos
```

```
LCfitmale = fit(LC, data = Ptmale, ages.fit = ages.fit, years.fit = years.fit)
LCfitfemale = fit(LC, data = Ptfemale, ages.fit = ages.fit, years.fit = years.fit)
LCfittotal = fit(LC, data = Pttotal, ages.fit = ages.fit, years.fit = years.fit)
```

```
print(LCfitmale)
print(LCfitfemale)
print(LCfittotal)
```

```
#Estimação de ax - alpha, bx - beta e kt - kappa pelo método de Lee Carter
```

```
par(mfrow=c(3,3))
plot(LCfitmale, nCol = 3, col = "red")
plot(LCfitfemale, nCol = 3, col = "green")
plot(LCfittotal, nCol = 3, col = "blue")
```

```
#Resíduos
```

```
LCresiduo_male = residuals(LCfitmale)
LCresiduo_female = residuals(LCfitfemale)
LCresiduo_total = residuals(LCfittotal)
```

```
#Mapas - Desvio dos resíduos em relação idade, ano e ano de nascimento para o modelos LC
```

```
par(mfrow=c(1,3))
plot(LCresiduo_male, main = "Resíduos de Desvio - Homen", type = "scatter", col = "red", reslim = c(-3.5, 3.5))
plot(LCresiduo_female, main = "Resíduos de Desvio - Mulher", type = "scatter", col = "green", reslim = c(-3.5, 3.5))
plot(LCresiduo_total, main = "Resíduos de Desvio - Total", type = "scatter", col = "blue", reslim = c(-3.5, 3.5))
```

```
LCresiduo_male
```

```

LCresiduo_female
LCresiduo_total

#ESTIMATIVA ax
ax_male = LCfitmale$ax[1:111]
ax_female = LCfitfemale$ax[1:111]
ax_total = LCfittotal$ax[1:111]

#ESTIMATIVA bx
bx_male = LCfitmale$bx[1:111]
bx_female = LCfitfemale$bx[1:111]
bx_total = LCfittotal$bx[1:111]

#TRANSFERIR AX E BX PARA EXCEL
ax_bx = cbind(ax_male,bx_male, ax_female, bx_female, ax_total, bx_total)
ax_bx
write.xlsx(ax_bx, file = "ax_bx_H_M_T.xlsx")
getwd()

#ESTIMATIVA kt
kt_male = LCfitmale$kt[1:76]
kt_female = LCfitfemale$kt[1:76]
kt_total = LCfittotal$kt[1:76]

#TRANFERIR KT PARA EXCEL
kt_ = cbind(kt_male, kt_female, kt_total)
kt_
write.xlsx(kt_, file = "kt_H_M_T.xlsx")

kt_male
kt_female
kt_total

#TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS EM SÉRIES TEMPORAIS
myts_kt_male = ts(kt_male, start = c(1980), end = c(2015), frequency = 1)
myts_kt_female = ts(kt_female, start = c(1980), end = c(2015), frequency = 1)
myts_kt_total = ts(kt_total, start = c(1980), end = c(2015), frequency = 1)

#ANÁLISE EXPLORATÓRIA DA SÉRIE TEMPORAL E VISUALIZAÇÕES
summary(myts_kt_male)
summary(myts_kt_female)
summary(myts_kt_total)

par(mfrow=c(1,3))
boxplot(myts_kt_male, main = "Homen")
boxplot(myts_kt_female, main = "Mulher")
boxplot(myts_kt_total, main = "Total")

par(mfrow=c(1,3))
plot(myts_kt_male, col = "red", main = "Serie Original - Homem")
plot(myts_kt_female, col = "green", main = "Serie Original - Mulher")
plot(myts_kt_total, col = "blue", main = "Serie Original - Total")

par(mfrow=c(3,2))

```

```

acf(myts_kt_male)
pacf(myts_kt_male)
acf(myts_kt_female)
pacf(myts_kt_female)
acf(myts_kt_total)
pacf(myts_kt_total)

#TESTE ESTACIONARIDADE DICK FULLER

#Teste Dick Fuller myts_kt_male
teste_est_DF_male = ur.df(y=myts_kt_male, type='none', lags=0)
print(teste_est_DF_male)
summary(teste_est_DF_male)

#Teste Dick Fuller myts_kt_female
teste_est_DF_female = ur.df(y=myts_kt_female, type='none', lags=0)
print(teste_est_DF_female)
summary(teste_est_DF_female)

#Teste Dick Fuller myts_kt_total
teste_est_DF_total = ur.df(y=myts_kt_total, type='none', lags=0)
print(teste_est_DF_total)
summary(teste_est_DF_total)

#-H0: Série não é estacionária
#-H1: Série estacionária

#TOTAL DIFERENCIAÇÃO
ndiffs(myts_kt_male)
ndiffs(myts_kt_female)
ndiffs(myts_kt_total)

#PRIMEIRA DIFERENÇA DAS SÉRIES
diff_1_male = diff(myts_kt_male)
diff_1_female = diff(myts_kt_female)
diff_1_total = diff(myts_kt_total)

par(mfrow=c(1,3))
plot(diff_1_male, col = "red", main = "1ª DIFF - Homem")
plot(diff_1_female, col = "green", main = "1ª DIFF - Mulher")
plot(diff_1_total, col = "blue", main = "1ª DIFF - Total")

ndiffs(diff_1_male)
ndiffs(diff_1_female)
ndiffs(diff_1_total)

#SEGUNDA DIFERENÇA DAS SÉRIES
diff_2_male = diff(diff_1_male)
diff_2_female = diff(diff_1_female)
diff_2_total = diff(diff_1_total)

par(mfrow=c(1,3))
plot(diff_2_male, col = "red", main = "2ª DIFF - Homem")
plot(diff_2_female, col = "green", main = "2ª DIFF - Mulher")

```

```

plot(diff_2_total, col = "blue", main = "2ª DIFF - Total")

ndiffs(diff_2_male)
ndiffs(diff_2_female)
ndiffs(diff_2_total)

#TESTE DICK FULLER PARA SEGUNDA DIFERENÇA
teste_est_DF_diff_2_male = ur.df(y=diff_2_male, type='none', lags=0)
print(teste_est_DF_diff_2_male)
summary(teste_est_DF_diff_2_male)

teste_est_DF_diff_2_female = ur.df(y=diff_2_female, type='none', lags=0)
print(teste_est_DF_diff_2_female)
summary(teste_est_DF_diff_2_female)

teste_est_DF_diff_2_total = ur.df(y=diff_2_total, type='none', lags=0)
print(teste_est_DF_diff_2_total)
summary(teste_est_DF_diff_2_total)

#-H0: Série não é estacionária
#-H1: Série estacionária

#AUTOCORRELAÇÃO/CORRELAÇÃO
tsdisplay(diff_2_male)
tsdisplay(diff_2_female)
tsdisplay(diff_2_total)

#MODELO ARIMA INICIAL HOMEM
modelo_arima_male = auto.arima(myts_kt_male, trace = T, stepwise = F, approximation =
F)
print(modelo_arima_male)
tsdiag(modelo_arima_male)

#MODELO ARIMA INICIAL MULHER
modelo_arima_female = auto.arima(myts_kt_female, trace = T, stepwise = F,
approximation = F)
print(modelo_arima_female)
tsdiag(modelo_arima_female)

#MODELO ARIMA INICIAL TOTAL
modelo_arima_total = auto.arima(myts_kt_total, trace = T, stepwise = F, approximation =
F)
print(modelo_arima_total)
tsdiag(modelo_arima_total)

#RESIDUOS
checkresiduals(modelo_arima_male)
checkresiduals(modelo_arima_female)
checkresiduals(modelo_arima_total)

H0: Resíduos são i.i.d (São independentes)
H1: Resíduos não são i.i.d (Não São independentes)

#TESTE NORMALIDADE

```



```
shapiro.test(modelo_arma_male$residuals)
shapiro.test(modelo_arma_female$residuals)
shapiro.test(modelo_arma_total$residuals)
```

H0: Resíduos provem de Pop. Normal
H1: Resíduos não provem de Pop. Normal

```
var(modelo_arma_male$residuals)
mean(modelo_arma_male$residuals)
var(modelo_arma_female$residuals)
mean(modelo_arma_female$residuals)
var(modelo_arma_total$residuals)
mean(modelo_arma_total$residuals)
```

```
#MODELO DE PREVISÃO ARIMA LC
LCArimaMale = forecast(LCfitmale, h = 50, kt.method = "iarima", kt.order = c(0, 2, 2),
level = c(95,99))
LCArimaFemale = forecast(LCfitfemale, h = 50, kt.method = "iarima", kt.order = c(0, 2,
2), level = c(95,99))
LCArimaTotal = forecast(LCfittotal, h = 50, kt.method = "iarima", kt.order = c(0, 2, 2),
level = c(95,99))
```

```
#PREVISÕES LCA
head(LCArimaMale)
LCArimaFemale
LCArimaTotal
```

```
plot(LCArimaMale, nCol = 3, col = "red", only.kt = TRUE)
legend("top", legend="Homen", lty=1, col=2, lwd=2, bty="n")
plot(LCArimaFemale, nCol = 3, col = "green", only.kt = TRUE)
plot(LCArimaTotal, nCol = 3, col = "blue", only.kt = TRUE)
```

```
#PREVISÃO PARA kt
prev_arma_male = forecast(modelo_arma_male, h=50, level = c(95,99))
prev_arma_female = forecast(modelo_arma_female, h=50, level = c(95,99))
prev_arma_total = forecast(modelo_arma_total, h=50, level = c(95,99))
```

```
par(mfrow=c(1,3))
plot(prev_arma_male)
plot(prev_arma_female)
plot(prev_arma_total)
```

```
#IMPRIMIR OS VALORES DAS PREVISÕES
prev_arma_male
prev_arma_female
prev_arma_total
```

```
#EXPORTAR PREVISÕES PARA EXCEL
write.xlsx(prev_arma_male, file = "previsao_homem.xlsx")
write.xlsx(prev_arma_female, file = "previsao_mulher.xlsx")
write.xlsx(prev_arma_total, file = "previsao_total.xlsx")
```

```
#PREVISÃO COM DRIFT
```

```

prev_drift_kt_male = rwf(myts_kt_male, h = 50, drift = T, level = c(95, 99))
prev_drift_kt_male

prev_drift_kt_female = rwf(myts_kt_female, h = 50, drift = T, level = c(95, 99))
prev_drift_kt_female

prev_drift_kt_total = rwf(myts_kt_total, h = 50, drift = T, level = c(95, 99))
prev_drift_kt_total

par(mfrow=c(1,3))
plot(prev_drift_kt_male)
legend("top", legend="Homem", lty=1, col=2, lwd=2, bty="n")
plot(prev_drift_kt_female)
legend("top", legend="Mulher", lty=1, col=2, lwd=2, bty="n")
plot(prev_drift_kt_total)
legend("top", legend="Total", lty=1, col=2, lwd=2, bty="n")

#Grafico previsão Passeio Aleatório
LCmaleprev = forecast(LCfitmale, h = 50)
LCfemaleprev = forecast(LCfitfemale, h = 50)
LCtotalprev = forecast(LCfittotal, h = 50)

par(mfrow=c(1,3))
plot(LCmaleprev, nCol = 3, only.kt = TRUE, col = "red")
legend("top", legend="Homem", lty=1, col=2, lwd=2, bty="n")
plot(LCfemaleprev, nCol = 3, only.kt = TRUE, col = "green")
legend("top", legend="Mulher", lty=1, col=2, lwd=2, bty="n")
plot(LCtotalprev, nCol = 3, only.kt = TRUE, col = "blue")
legend("top", legend="Total", lty=1, col=2, lwd=2, bty="n")

```

